المحددات

_(خواصها، حل المعادلات الآنية بطريقة المحددات(كريمر))

أهداف المادة(Objectives):-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه الوحدة قادراً على :

1. تعريف المحدد ووصف أنواعه وطريقة إيجاد قيمة كل نوع.
2. استخدام خواص المحددات في تبسيط حل المحدد الذي بين يديه.
3. حل المعادلات الخطية بطريقة المحددات لإيجاد قيم مجاهيل تلك المعادلات.

التعريف:- مجموعة عناصر تترتب بشكل صفوف وأعمدة محصورة بين مستقيمين شاقوليين،وتكون فيها عدد الصفوف مساو لعدد الأعمدة.و يسمى المحدد اعتمادا على عدد صفوفه أو أعمدته.

المحدد الثائي $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

المحدد الثلاثي $\begin{vmatrix} a & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \\ \mathrm{c} & \mathrm{g} & \mathrm{j} \end{vmatrix}$

إيجاد قيمة المحدد

1- المحدد الثنائي $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

نضرب نهايات الأقطار ببعضها ويطرح حاصل الضرب،ويكون الفرق هو الناتج.

=a*d –b*c

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

=3*2 – 2*1 = 4

2- المحدد الثلاثي $\begin{vmatrix} a & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{b} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \\ \mathrm{c} & \mathrm{g} & \mathrm{j} \end{vmatrix}$

(1)طريقة المحدد المساعد:- تحسب قيمة هذا المحدد بطريقة التجزئة (المحددات المساعدة).

المحدد المساعد:هو المحدد الذي يحتوي على عناصر المحدد الأصلي عدا العناصر الواقعة في الصف و العمود الحاوية على العنصر المراد إيجاد محدده المساعد.

$$\begin{vmatrix} f & i \\ g & j \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} e & h \\ g & j \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & h \\ c & j \end{vmatrix}$$

(a) (b) (c) (f) المحدد المساعد للعنصر

في طريقة المحددات المساعدة يجب مراعات الملاحظة التالية:

عند اختيار العنصر المراد إيجاد محدده المساعد يجب أن نضع أمامه الإشارة اللازمة في التجزئة وكما يلي :-

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

وعند اختيار احد الصفوف أو الأعمدة لاستخراج المحددات المساعدة لها يفضل اختيار العمود أو الصف الذي يحوي أكثر عدد من الأقطار لتبسيط الحل.

<u>مثال(1) :-</u> جد قيمة المحدد التالي باستخدام طريقة المحددات المساعدة:-

الحل: نختار الصف الثالث(لماذا)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0*\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} -0*\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=0-0+1*(2*2-1*1)= 4-1=3$$

<u>مثال(2) :-</u> جد قيمة المحدد التالي باستخدام طريقة المحددات المساعدة:-

الحل: نختار العمود الأول(لماذا)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0*\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} +2*\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 3*\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=0+2*(-1*-5 -2*4)+3*(-1*3 -1*4) = 0+(2* -3)+ (3* -7)$$

$$= -6 -21 = -27$$

(2)<u>طريقة ضرب الأقطار:-</u> تتلخص بإضافة صفين أو عمودين ثم ضرب الأقطار مع ملاحظة الإشارات .

إضافة عمودين $\begin{vmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{vmatrix} \begin{matrix} a & e \\ b & f \\ c & g \end{matrix}$

اضافة صفين $\begin{vmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & e & h \\ b & f & i \end{vmatrix}$

<u>مثال(1) :-</u> جد قيمة المحدد التالي بإضافة عمودين:-

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

=(2*2*1+1*0*0+3*1*0)-(0*2*3+0*0*2+1*1*1)

=(4+0+0)-(0+0+1)

=4-1=3

<u>مثال(2) :-</u> جد قيمة المحدد التالي بإضافة صفين:-

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

=(0*1*-5)+(-2*2*4)+(3*-1*3)-(-2*-1*-5)-(0*2*3)-(3*1*4)

= 0+(-16)+(-9)-(-10)-(0)-(12)

= -27

خواص المحددات:-

1- كل عامل مشترك بين عناصر أي صف أو عمود يمكن إخراجه خارج المحدد كعامل مشترك لذلك المحدد.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3* \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بإخراج (3)كعامل مشترك للصف الثالث.

2- إذا جزئنا عناصر اي صف او عمود الى مجموع حدين فيمكن كتابة المحدد على شكل مجموع محددين.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3+2 & 3 \\ 1 & 0+2 & 0 \\ 0 & 1+2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

3- إذا كانت جميع عناصر أي صف أو عمود أصفار فان قيمة المحدد تساوي صفرا.

4- يمكن ضرب عناصر أي صف أو عمود بأي عدد وإضافة الناتج إلى عناصر أي صف أو عمود آخر في المحدد مع بقاء قيمة المحدد ثابتة.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بضرب عناصر العمود الأول بـ (2-)وإضافة الناتج إلى عناصر العمود الثاني.

5- إذا أبدل مواقع أي صفين أو عمودين متجاورين تتبدل فقط إشارة المحدد مع بقاء قيمته ثابتة.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1- اذا كانت عناصر اي صفين او عمودين متساوية او مضاعفاتها فان قيمة المحدد تساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

لأن عناصر العمود الثالث ضعف عناصر العمود الأول.

حل المعادلات الآنية باستخدام المحددات(كريمر):-

قيمة كل مجهول هو خارج قسمة محددين احدهما بالبسط والآخر بالمقام.المحدد الذي يكتب بالمقام لجميع المجاهيل مكون من عوامل تلك المجاهيل بنفس الترتيب .اما المحدد الذي يكتب بالبسط فهو نفس محدد المقام بعد تبديل عوامل المجهول المراد ايجاد قيمته بنفس الترتيب.

مثال(1) :- حل المعادلة الآنية التالية بطريقة كريمر:-

$$x + y + 2z = 6$$

$$2\,x + y + z = 4$$

$$x + 2y + 3z = 8$$

الحل:-

1- نستخرج محدد المقام

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$D = 3 + 1 + 8 - (6 + 2 + 2) = 2$$

2- نحدد قيمة المجهول (X):-

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{matrix}$$

$$D = 18 + 8 + 16 - (12 + 12 + 16) = 2$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{2} = 1$$

3- نحدد قيمة المجهول (Y):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{matrix}$$

$$D = 12 + 6 + 32 - (36 + 8 + 8) = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{2} = -1$$

4- نحدد قيمة المجهول (Z):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$D = 8 + 4 + 24 - (16 + 8 + 6) = 6$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{6}{2} = 3$$

<u>التغذية المسترجعة</u>

1- سؤال الطلبة عن مفهوم المحدد وكيفية إيجاد قيمته.
2- سؤال الطلبة عن خواص المحددات.
3- سؤال الطلبة عن حل المعادلات الآنية باستخدام المحددات.
4- تكليف الطلبة بالواجب التالي.

سؤال(1) :- جد قيمة المحدد التالي باستخدام طريقة المحددات المساعدة:-

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

سؤال(1) :- جد قيمة المحدد التالي بإضافة صفين:-

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

سؤال(1) :- حل المعادلات الآنية التالية بطريقة كريمر:-

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$2\,x + y + 2z = 7$$

$$2x + 2y + z = 2$$

المصفوفات Matrices

تعرف المصفوفة بأنها مجموعة أعداد أو مركبات مرتبه بشكل صفوف واعمدة محددة بالاقواس الصغيرة كما في الشكل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$= \quad 3 \times 3$

$$A = \begin{Bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{Bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$= \quad 2 \times 2 \qquad\qquad = 3 \times 2$

<u>انواع المصفوفات :</u>

1 – المصفوفات المربعة :

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2 - المصفوفات الصفرية

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ----- & 0 \\ 0 & 0 & ----- & 0 \\ 0 & 0 & ----- & 0 \end{bmatrix}$$

يقال لمصفوفة جميع عناصرها اصفار او مصفوفة صفرية ويرمز لها بالرمز صفر .

3 - المصفوفات القطريه

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

تكون مربعة الشكل قطريه اذا كانت جميع عناصرها اصفاراً بستثناء عناصر القطر فقط

4 - المصفوفات الذاتية الواحدية $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

تكون جميع عناصرها اصفاراً بستثناء عناصر القطر فانه تكون مساوية للعدد1 .

أولاً : جمع وطرح المصفوفات

ملاحظة : يمكن جمع وطرح اي مصفوفتين بشرط ان تكون من نفس المرتبة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 1 : اذا كانت A ، B مصفوفتان ، جد A + B ، A – B

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ، \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

ثانياً : ضرب المصفوفة في كمية ثابتة او قياسية :

اذا كانت A مصفوفة وكانت K كمية ثابتة فأن حاصل ضرب المصفوفة A بالثابت K .

مثال 2 : اذا كانت A مصفوفة ، جد المصفوفة K.A عندما

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad ، \quad K = 2$$

$$K.A = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -4 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

ثالثأ : ضرب المصفوفات :

وبشكل ادق ، لحساب حاصل ضرب مصفوفتين لابد ان يتم ضرب جميع عناصر صفوف A في عناصر المناظرة لها في اعمدة المصفوفة B ثم اخذ مجموع حواصل الضرب تلك لتمثل عنصرا جديدا هي C

مثال 3 : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين (A . B) أذا كانت : ، $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $A = [1 \quad 2 \quad 3]$

A . B = (1 X -2) + (2 X 2) + (3 X 1) = -2 + 4 + 3 = 5

مثال4 : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين (A . B) أذا كانت : ، $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $A = [1 \quad 2 \quad 3]$

A . B = (1 X 5) + (2 X 4) + (3 X -1) = 5 + 8 - 3 = 10

مثال5 : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين (A . B) أذا كانت : ، $B = \begin{Bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{Bmatrix}$ ، $A = [1 \quad 3]$

A . B = (1 X 5) + (3 X 4) **(1 X -1) + (3 x 0)**

(-1 + 0) **A . B =** (5 + 12)

-1) (17**A . B =**

مثال6 : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين (A . B) أذا كانت : ، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{Bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$

$$A.B = \{(5 X 1) + (1 X 2) + (1 x -1)\} = \{5 + 2 - 1\} = \{6\}$$

$$A.B = \{(4 X 1) + (2 X 2) + (0 x -1)\} = \{4 + 4 + 0\} = \{8\}$$

متجهات(vectors)

أهداف المادة(Objectives):-

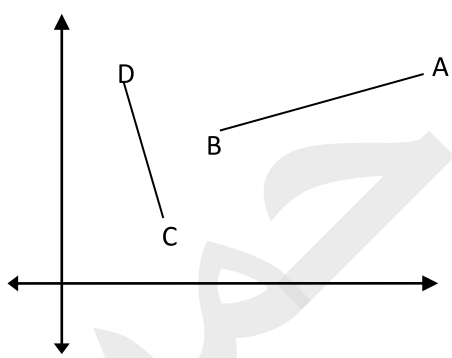
سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه الوحدة قادراً على :

4. تعريف المتجه ووصف الكميات العددية والاتجاهية والمصطلحات الخاصة بها.
5. تمثيل المتجه على المستوي.
6. جمع وطرح وضرب المتجهات.

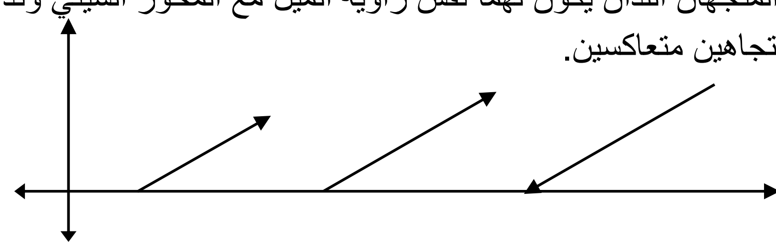
الكميات العددية: هي الكميات التي تحتاج إلى وصفها ذكر مقدارها فقط مثل الطول أو الكتلة أو الزمن.

الكميات الاتجاهية:هي الكميات الفيزيائية والرياضية التي تحتاج الى وصفها ذكر مقدارها واتجاهها مثل الإزاحة والسرعة والقوة.

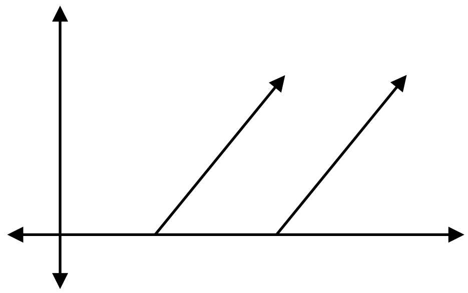
يمكن تمثيل المتجه بمستقيم فيه حرفان الأول لبدايته والثاني لنهايته ويوضع فوقهما سهم مثل $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.



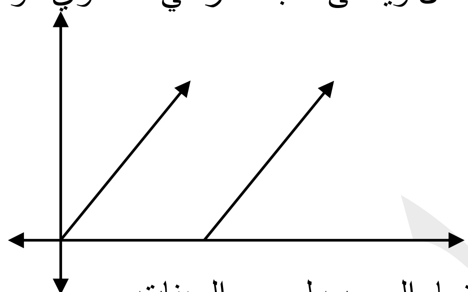
المتجهان المتوازيان هما المتجهان اللذان يكون لهما نفس زاوية الميل مع المحور السيني وقد يكونان بنفس الاتجاه أو باتجاهين متعاكسين.



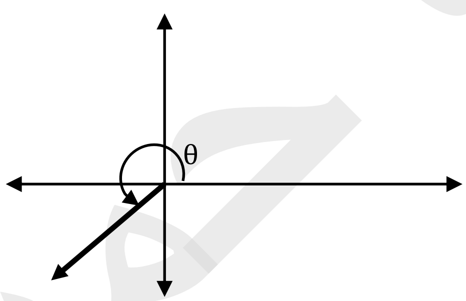
المتجهان المتكافئان هما المتجهان اللذان لهما نفس الطول والاتجاه.



المتجه المكافئ هو المتجه الذي تكون بدايته نقطة الأصل ويكافئ متجه آخر في المستوي الواقع فيه.



اتجاه المتجه:هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



تمثيل المتجه على المستوي: لو افترضنا ان بداية كل متجه هي نقطة الأصل في مستوي معين فان نهاية المتجه هي نقطة أخرى على ذلك المستوي.

طول المتجه: هي المسافة بين نقطتي بداية ونهاية المتجه.ويستخدم قانون الطول لإيجاد طول المتجه.

$$|L| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

في حالة كون بداية المتجه نقطة الأصل فان طول المتجه يحسب كما يلي

$$|L| = \sqrt{x^2 + y^2}$$ لماذا

مثال:جد طول المتجه المحصور بين النقطتين (5,7)،(2,3)

الحل:

$$|L| = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = |5|units$$

مثال:جد طول المتجه (3,5)

الحل:يعتبر هذا المتجه متجه مكافئ كون بدايته نقطة الأصل.

$$|L| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \left|\sqrt{34}\right| = |5.83|units$$

مثال:جد طول واتجاه المتجه (-1,-3), (3,5)

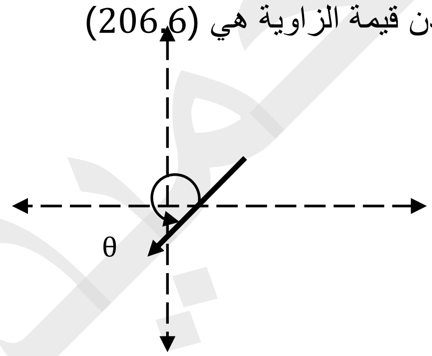
الحل

$$|L| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \left|\sqrt{80}\right|$$
$$= |8.94|units$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{4}{8} = 0.5 \to\to \tan^{-1} 0.5 = \theta$$

لأن ظل الزاوية موجب في الربعين الأول والثالث $\therefore\ \theta = 26.6\ or\ 206.6$

وبما ان النقطة (-1,-3) تقع في الربع الثالث . إذن قيمة الزاوية هي (206.6)



مثال:جد طول واتجاه المتجه $(\sqrt{3}, -1)$

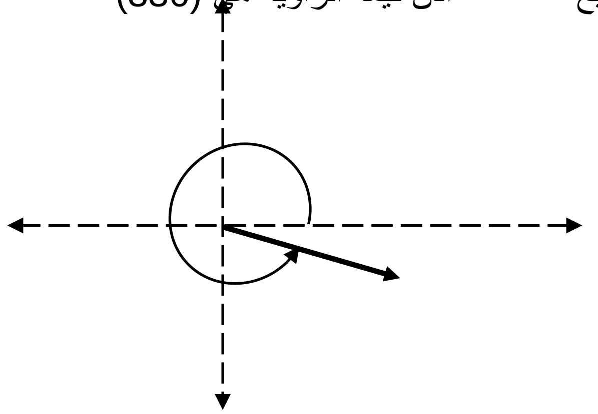
الحل

$$|L| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = |2|units$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{2} = -0.5 \to\to \sin^{-1} 0.5 = \theta$$

لأن جيب الزاوية سالب في الربع الرابع $\therefore\ \theta = 30\ or\ 330$

وبما ان النقطة $(\sqrt{3}\ ,-1)$ تقع في الربع الرابع اذن قيمة الزاوية هي (330)



مثال:جد نقطة نهاية المتجه الذي بدايته نقطة الأصل وطوله (5)وحدات واتجاهه (30^{o}) مع محور السينات.

الحل:

$$\cos 30 = \frac{x}{L} = \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \to\to x = 4.33$$

$$\sin 30 = \frac{y}{L} = \frac{y}{5} = 0.5 \quad \to\to y = 2.5$$

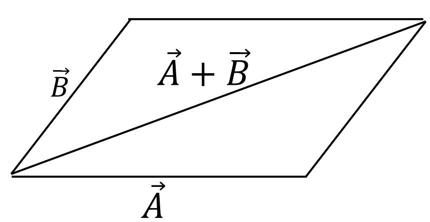
اذن النقطة هي (4.33,2.5)

جمع المتجهات :لجمع متجهين نرسم المتجه الأول ثم نرسم المتجه الثاني من نهاية المتجه الأول ثم نوجد اتجاه محصلة المتجهين بطريقة متوازي المستطيلات (اتجاه المحصلة يمثل قطر متوازي المستطيلات الذي يكون المتجهان ضلعين متجاورين فيه.وكما يلي

إذا كان

$$\vec{\mathrm{A}} = (x_1, y_1) \quad , \qquad \vec{B} = (x_2, y_2)$$

فان

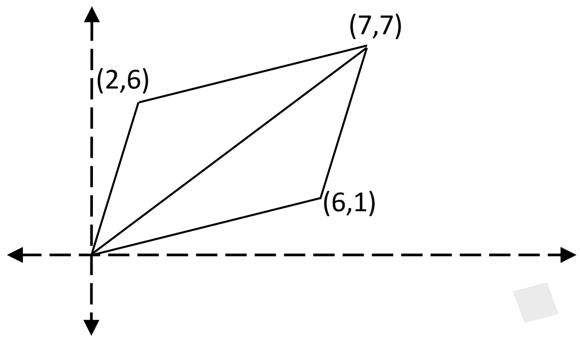


$$\vec{\mathrm{A}} + \vec{B} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2), (y_1 + y_2)$$

مثال: اذا كان $\vec{A} = (2,6) \quad , \vec{B} = (5,1)$ جد $\vec{A} + \vec{B}$

الحل:

$$\vec{A} + \vec{B} = (2+5),(6+1) = (7,6)$$



طرح المتجهات: اذا كان كل من $\vec{B} = (x_2, y_2) \quad , \vec{A} = (x_1, y_1)$ متجهان فان

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

$$= (x_1, y_1) + \left(-(x_2, y_2)\right) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2)$$

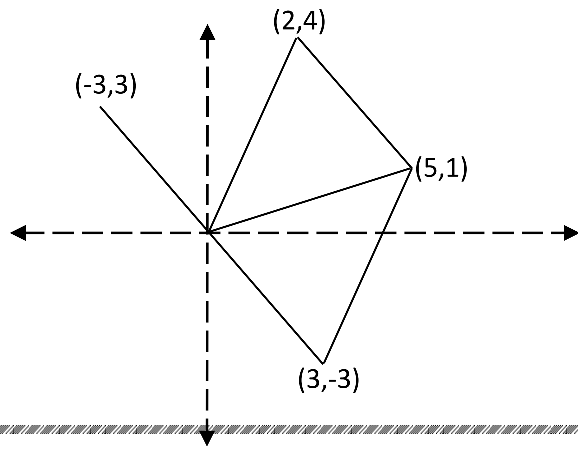
$$= (x_1 - x_2), (y_1 - y_2)$$

ويمكن تفسير ذلك هندسيا بان محصلة $(\vec{A} - \vec{B})$ يمثل قطر متوازي الأضلاع للمتجه $(\vec{A})$ وسالب المتجه $(\vec{B})$

مثال:- اذا كان $\vec{B} = (-3,3) \quad , \vec{A} = (2,4)$ متجهان .جد $\vec{A} - \vec{B}$

الحل:

$$\vec{A} - \vec{B} = (2,4) - (-3,3) = (2,4) + (3,-3) = (5,1)$$



ضرب المتجه بعدد حقيقي:إذا كان $\vec{A} = (x, y)$ و(C)عدد حقيقي فان

$$C * \vec{A} = (cx, cy)$$

ويمكن تفسير ذلك هندسيا ان المتجه الجديد $(C * \vec{A})$ يكون على استقامة المتجه$(\vec{A})$وطوله يساوي (C) مرة من المتجه$(\vec{A})$. فإذا كانت $(C > 0)$فان المتجه الجديد يقع على استقامة المتجه الأصلي وبنفس اتجاهه. أما إذا كانت$(C < 0)$ فان المتجه الجديد يقع على استقامة المتجه الأصلي وبعكس اتجاهه.

مثال:- اذا كان $\vec{B} = (-3,3)$, $\vec{A} = (2,4)$ متجهان و(C=2)عدد حقيقي .جد

1- C*A
2- C*B
3- C*$(\vec{A} + \vec{B})$
4- C*$(\vec{A} - \vec{B})$ مع الرسم

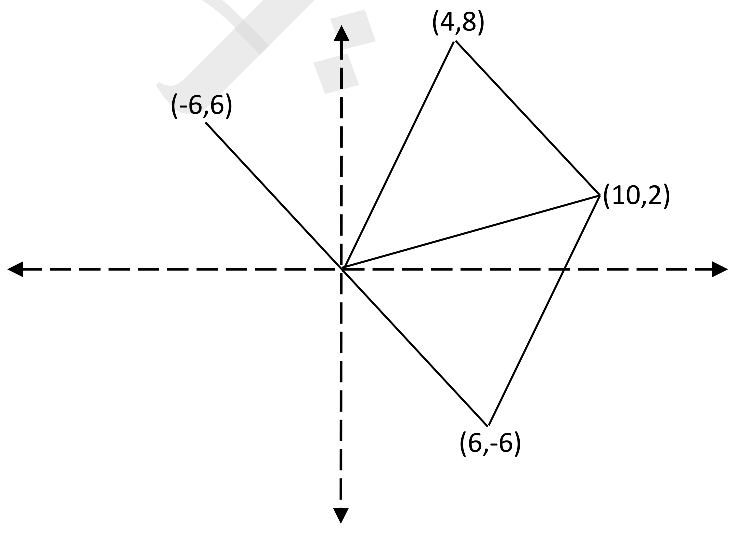
الحل:

$$1 - C * A = (2 * 2, 2 * 4) = (4,8)$$

$$2 - C * B = (2 * -3, 2 * 3) = (-6,6)$$

$$3 - C * (\vec{A} + \vec{B}) = (4,8) + (-6,6) = (-2,14)$$

$$4 - C * (\vec{A} - \vec{B}) = (4,8) - (-6,6) = (4,8) + (6,-6) = (10,2)$$



التغذية المسترجعة

5- سؤال الطلبة عن مفهوم المتجه ووصف الكميات العددية والاتجاهية.
6- سؤال الطلبة عن تمثيل المتجه على المستوي.
7- سؤال الطلبة عن جمع وطرح وضرب المتجهات.

سؤال: اذا كان $\vec{B}=(4,-5)$, $\vec{A}=(1,-4)$ متجهان و(C=2)عدد حقيقي .جد

1- C*A
2- C*B
3- $C*(\vec{A}+\vec{B})$

$C*(\vec{A}-\vec{B})$ مع الرسم

التفاضل:

معدل تغير المتغير المعتمد إلى معدل تغير المتغير المستقل.أو هو ميل المستقيم المماس لأي منحني عند نقطة التماس.

أهداف المادة(Objectives):-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المادة قادراً على :

1. تعريف التفاضل رياضيا و هندسيا وفيزيائيا.
2. إيجاد ناتج الاشتقاق لأي نوع من الدوال الجبرية والدوال الأسية واللوغارتمية وغيرها.

قواعد الاشتقاق:-

أولا: الدوال الجبرية:-

1- مشتقة العدد الثابت= صفر.

If y=f(x) = c -------- c=constant

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Example:- find $(\frac{dy}{dx})$ *if*

1- y = 7 --------- $\frac{dy}{dx} = 0$

2- y = -12 --------- $\frac{dy}{dx} = 0$

2- مشتقة المقدار الجبري المتكون من ثابت مضروب (x)مرفوع للقوة(n)

$$if \quad y = c.x^n$$

$$then \quad \frac{dy}{dx} = n.c.x^{n-1}$$

Example:- find $(\frac{dy}{dx})$ *if*

1- y= 7*x^3 --------- $\frac{dy}{dx} = 21 * x^2$

2- y= -12*x^{-3} --------- $\frac{dy}{dx} = 36 * x^{-4}$

3- مشتقة دالة متعددة الحدود تساوي مشتقة كل حد على حدة.

$$if\ y = f(x) + g(x) + u(x) + \cdots$$
$$then\ \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dx} + \frac{d\ \ldots}{dx}$$

Example:- find ($\frac{dy}{dx}$) *if*

1- $y = 2x^3 + 5x^2 - x^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 10x + x^{-2}$

2- $y = \frac{5}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x^2} - 3x^3$

$y = 5x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{-2} - 3x^3$

$\frac{dy}{dx} = -4x^{-\frac{5}{4}} - 6x^{-3} + 9x^2$

4- مشتقة دالة مرفوعة للأس (n) تساوي ألالأس مضروب في الدالة مرفوعة للأس(n-1) ومضروبة في مشتقة نفس الدالة.

$$if\ y = u^n \ldots\ldots\ldots u = f(x)\ \ .n = constant$$

$$then\ \ \frac{dy}{dx} = n.u^{n-1}.\frac{du}{dx}$$

Example:- find ($\frac{dy}{dx}$) *if*

$1 - y = 2x^3 + 5x^2 - x^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 10x + x^{-2}$

$y = \frac{5}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x^2} - 3x^3$ -2

$y = 5x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{-2} - 3x^3$

$\frac{dy}{dx} = -4x^{-\frac{5}{4}} - 6x^{-3} + 9x^2$

5- مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي الدالة الأولى مضروبة في مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية مضروبة في مشتقة الدالة الأولى.

$$if\ y = u * v \ldots\ldots\ldots u = f(x)\ , v = f(x)$$

$$then\ \ \frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

$$Example{:}-find\left(\frac{dy}{dx}\right)if$$

$$1 - y = (3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5).(x^2 + x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5).(2x + 3x^2) + (9x^2 - 5x^4 + 8x^3).(x^2 + x^3)$$

$$2 - y = (4x^3 - 2x^5)^2.(3x^2 + 4x^{-3})$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 - 2x^5)^2.(6x - 12x^{-4}) + (3x^2 + 4x^{-3}).[2(4x^3 - 2x^5).(12x^2 - 10x^4)]$$

6- مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي المقام مضروبا في مشتقة البسط مطروحا منه البسط مضروبا في مشتقة المقام والكل مقسوما على مربع المقام.

$$if\ y = \frac{u}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots u = f(x)\ \ , v = f(x)$$

$$then\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{du}{x} -\ u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$Example{:}-find\left(\frac{dy}{dx}\right)if$$

$$1 - y = \frac{(3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5)}{(x^2 + x^3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x^3).(9x^2 - 5x^4 + 8x^3) - (3x^3 - x^5 + 2x^4 + 5).(2x + 3x^2)}{(x^2 + x^3)^2}$$

$$2 - y = \frac{(4x^3 - 2x^5)^2}{(3x^2 + 4x^{-3})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 + 4x^{-3}).[2(4x^3 - 2x^5).(12x^2 - 10x^4)] - (4x^3 - 2x^5)^2.(6x - 12x^{-4})}{(3x^2 + 4x^{-3})^2}$$

ثانيا: الدوال الضمنية:- الدالة الضمنية هي الدالة التي يمكن وضع أحد المتغيرات مثل (y) بدلالة متغير آخر مثل (x). أو هي الدالة التي يكون فيها المتغير المستقل غير منفصل عن المتغير المعتمد. وتوجد أمثلة كثيرة على هذه الدوال في التطبيقات العملية من أمثلتها معادلة الدائرة.

$Example\colon -find \left(\frac{dy}{dx}\right) if$

$$1 - 5x^4 - x^2y^3 - 7y^3 = 8$$

$$20x^3 - (x^2.3y^2.\frac{dy}{dx} + y^3.2x) - 21y^2.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-(3x^2.y^2 + 21y^2)\frac{dy}{dx} = 2x.y^3 - 20x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x.y^3 - 20x^3}{3x^2.y^2 + 21y^2}$$

$$2 - 3x^3y^3 - 5y^2 = 2x^4$$

$$3\left[x^3.3y^2.\frac{dy}{dx} + y^3.3x^2\right] - 10y\,.\frac{dy}{dx} = 8x^3$$

$$[9x^3.3y^2 - 10y]\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 9y^3.x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3 - 9y^3.x^2}{9x^3.3y^2 - 10y}$$

ثالثا:- ***مشتقة الدالة الأسية***:-

$$if\ y = e^{u} \ldots\ldots\ldots\ldots. u = f(x)$$

$$then\ \ \frac{dy}{dx} = e^{u}.\frac{du}{dx}$$

$Example: -find \left(\frac{dy}{dx}\right) if$

$1 - y = e^{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}.(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x.e^{x^2}$$

$2 - y = e^{(x-6)^3}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{(2x-6)^3}.3(2x-6)(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(2x-6)e^{(2x-6)^3}$$

رابعا: ***مشتقة الدالة اللوغارتمية***:-

$$if\ y = \ln u \ldots\ldots\ldots\ldots. u = f(x)$$

$$then\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

$Example: -find \left(\frac{dy}{dx}\right) if$

$1 -\ y = \ln(3x-4)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x-4}.(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x-4}$$

$$2-\ y=\ln\left(2x^3+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(2x^3+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^5}.5\left(2x^3+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^4.\left(6x^2-10x^{-3}-4x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\left(2x^3+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^4.\left(6x^2-10x^{-3}-4x^{-\frac{1}{3}}\right)}{\left(2x^3+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}\right)^5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\left(6x^2-10x^{-3}-4x^{-\frac{1}{3}}\right)}{2x^3+5x^{-2}-6x^{\frac{2}{3}}}$$

خامسا: ***مشتقة الدوال المثلثية:-***

$$1-\ if\ y=\sin u\ \ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \ \frac{dy}{dx}=\cos u\,.\frac{du}{dx}$$

$$2-\ if\ y=\cos u\ \ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \ \frac{dy}{dx}=-\sin u\,.\frac{du}{dx}$$

$$3-\ if\ y=\tan u\ \ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \ \frac{dy}{dx}=\sec^2 u\,.\frac{du}{dx}$$

$$4-\ if\ y=\cot u\ \ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \ \frac{dy}{dx}=-\csc^2 u\,.\frac{du}{dx}$$

$$5-\ if\ y=\sec u\ \ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \ \frac{dy}{dx}=\sec u.\tan u\,.\frac{du}{dx}$$

$$6-\ if\ y=\csc u\ \ldots\ldots\ldots\ldots.u=f(x)\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then\ \ \frac{dy}{dx}=-\csc u\,.\cot u\,.\frac{du}{dx}$$

$Example: -find \left(\frac{dy}{dx}\right) if$

$1- \ y = \sin x^2$

$\frac{dy}{dx} = \cos x^2 . (2x) = 2x . \cos x^2$

$2- \ y = \sin 2x \ . \cos x^3$

$\frac{dy}{dx} = \ \sin 2x \ . (-\sin x^3 . 3x^2) + \cos x^3 . (2 \sin 2x)$

$\frac{dy}{dx} = -3x^2 . \sin 2x \ . \sin x^3 + 2 \sin 2x \cos x^3$

$3- \ y = e^{\tan x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} . \sec^2 x$

سادسا: **قاعدة السلسلة**:- إذا كانت (y) دالة إلى (t)وكانت (t) دالة إلى (x) أي

$$if \ y = f(t) , \dots . t = f(x) \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow then \ \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dx}$$

$Example: -find \left(\frac{dy}{dx}\right) if$

$1 - y = 3t^2 - 2 \quad , \ t = 5x$

$\frac{dy}{dt} = 6t \quad , \frac{dt}{dx} = 5$

$\frac{dy}{dx} = (3t^2 - 2) . (5)$

$\frac{dy}{dx} = (3(5x)^2 - 2) . (5)$

$\frac{dy}{dx} = 75x^2 - 10$

سابعا:**الدالة المركبة**:- إذا كانت (y) دالة إلى (t)وكانت (x) دالة إلى (t) أي

$$if\ y=f(t)\ ,\ldots .x=f(t)\ \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\ then\ \ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$Example{:}-find\left(\frac{dy}{dx}\right)if$

$y=t^2+4$

$x=5t-2$

$\frac{dy}{dt}=2t$

$\frac{dx}{dt}=5$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{5}$

التغذية المسترجعة

1- سؤال الطلبة عن مفهوم التفاضل.
2- سؤال الطلبة عن القوانين العامة لاشتقاق الدوال الجبرية والأسية واللوغارتمية والمثلثية.
3- تكليف الطلبة بالواجب التالي.

$Example{:}-find\left(\frac{dy}{dx}\right)if$

1- y = 7
2- $y=\ 7*x^3$
3- $y=\frac{5}{\sqrt[4]{x}}+\frac{3}{x^2}-3x^3$
4- $y=e^{sinx}*\ln(\cos 2x)$
5- $y=2t^3\quad\rightarrow\rightarrow t=2x^2+5$
6- $y=2t-3\quad\rightarrow\rightarrow x=5t^2$
7- $4y^3-2x^3y^2=2x^2$

التطبيقات الفيزيائية للمشتقة:-

أهداف المادة(Objectives):-

سيكـون الـطالب بعـد دراستـهِ لهـذه الـوحـدة قـادراً عـلى :

1. معرفة مفهوم النقاط الحرجة (النهايات العظمى والصغرى)للدوال وكيفية ايجادها.
2. استخدام النهايات العظمى والصغرى في التطبيقات الفيزيائية وايجاد المطلوب في مسائل تلك التطبيقات.

مثال(1):- يراد تصنيع علبة اسطوانية حجمها $(16\,\pi)$سم^3. جد ابعاد هذه الاسطوانة بحيث تكون مساحتها السطحية اقل ما يمكن.

الحل:- المساحة السطحية للأسطوانة (S)وحجمها(V)وارتفاعها (h) ونصف قطر قاعدتها (r).

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = 16 = \pi r^2 h \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore h = {}^{16}/_{r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\left({}^{16}/_{r^2}\right) = \frac{2\pi r^3 + 32\pi}{r}$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r(6\pi r^2 + 0) - (2\pi r^3 + 32\pi)}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32\pi}{r^2} = \frac{4\pi(r^3 - 8)}{r^2}$$

at $\frac{ds}{dr}$ =0 then

$$\frac{4\pi(r^3 - 8)}{r^2} = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow (r^3 - 8) = 0 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore h = {}^{16}/_{r^2} = \frac{16}{2^2} = 4$$

مثال(2):- جد اقرب نقطة الى نقطة الأصل تقع على المستقيم$(x - 3y = 7)$

الحل:- نفرض ان (D) هي المسافة بين النقطة(X,Y) ونقطة الأصل(0,0)

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = 3y + 7$$

$$D = \sqrt{(3y + 7)^2 + y^2} = \sqrt{10y^2 + 42y + 49}$$

$$\frac{dD}{dy} = \frac{20y + 42}{2\sqrt{10y^2 + 42y + 49}}$$

$$at\ \frac{dD}{dy} = 0 = 20y^2 + 42 \quad then$$

$$20y + 42 = 0 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow y = -2.1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow x = 3(-2.1) + 7 = 0.7$$

The point is $(0.7, -2.1)$

مثال(3):- جد أبعاد اكبر مخروط دائري اذا كان مجموع نصف قطر قاعدته وارتفاعه (9سم).

الحل:- نفرض حجم المخروط(V) ونصف قطر قاعدته(r) وارتفاعه(h)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow h = 9 - r \ \ then$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (9 - r) = \frac{1}{3}\pi (9r^2 - \ r^3)$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{3}\pi (18r - 3\, r^2)$$

$$at \ \frac{dv}{dr} = 0 \ then \ \frac{1}{3}\pi (18r - 3\, r^2) = 0$$

$$18r - 3\, r^2 = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore r = 6 \ \ , h = 3$$

مثال(4):- العلاقة بين ارتفاع جسم قذف شاقوليا الى الاعلى والزمن هي ($h = 1600t - 16t^2$). جد اعلى ارتفاع يصله الجسم.

الحل:- سرعة الجسم(v).عند اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم تكون سرعته =صفر

$$v = \frac{dh}{dt} = 1600 - 32t = 0$$

$$\therefore t = \frac{1600}{32} = 50sec$$

$$\therefore h_{max} = 1600(50) - 16(50)^2 = 80000 - 40000 = 40000m$$

التغذية المسترجعة

1. سؤال الطالب عن معرفة مفهوم النقاط الحرجة (النهايات العظمى والصغرى)للدوال وكيفية ايجادها.
2. سؤال الطالب عن استخدام النهايات العظمى والصغرى في التطبيقات الفيزيائية وايجاد المطلوب في مسائل تلك التطبيقات.
3. تكليف الطلبة بالواجب التالي:-

سؤال(1): جد العدد الذي اذا أضيف الى مربعه كان الناتج اكبر ما يمكن.

سؤال(2):سلك طوله (L) يرغب بتحويله الى قطعتين تشكل الأولى لتكون دائرة والأخرى لتكون مربع. جد نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع بحيث تكون مجموع مساحتيهما في النهاية الصغرى.

سؤال(3): جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة(3،4) ويعمل مع المحورين مثلث في الربع الأول مساحته اصغر ما يمكن.

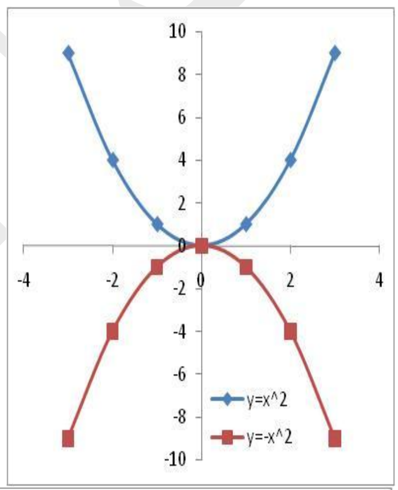
رسم الدوال

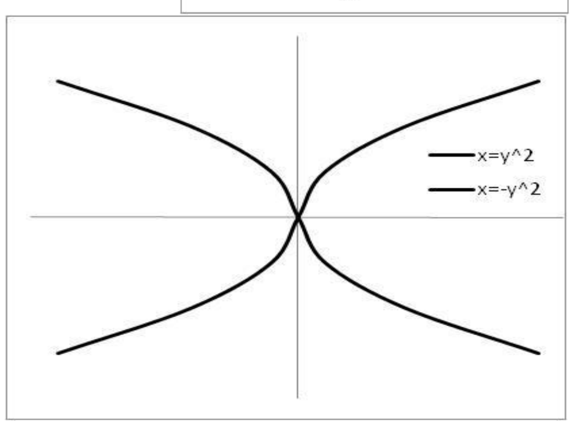
أهداف المادة(Objectives):-

سيكـون الـطالب بعـد دراسـتـهِ لهـذه الـوحـدة قـادراً عـلى :

3. وصف الشكل العام لبعض الدوال الجبرية والمثلثية.
4. تحديد النهايات العظمى والصغرى ونقاط التقاطع مع المحورين للدالة المطلوب رسمها.
5. استخدام النهايات العظمى والصغرى في رسم الدالة.

1- التناظر:- أ/ إذا كانت جميع أسس (y) زوجية فان الدالة متناظرة مع محور السينات.
ب/ إذا كانت جميع أسس (x) زوجية فان الدالة متناظرة مع محور الصادات.
ج/ إذا كانت الدالة تحتوي على أسس زوجية وفردية لقيم (x) أو(y) فان الدالة غير متناظرة.





2- التقاطع مع المحاور:-

أ/لإيجاد نقاط التقاطع مع محور السينات نفرض($y=0$) ونحل المعادلة لإيجاد قيم(x).

ب/ لإيجاد نقاط التقاطع مع محور الصادات نفرض($x=0$) ونحل المعادلة لإيجاد قيم(y).

3- النقاط الحرجة:-

أ- نوجد المشتقة الأولى للمعادلة ($\frac{dy}{dx}$)ونساويها بالصفر لإيجاد قيم (x) لتلك النقاط الحرجة،ثم نعوض قيم (x) بالمعادلة الأصلية لإيجاد قيم(y) لكل نقطة حرجة حصلنا عليها.

ب- نوجد المشتقة الثانية لتلك المعادلة ($\frac{d^2y}{dx^2}$) ونعوض قيم (x) فيها للنقاط الحرجة فان كانت($\frac{dy}{dx}$):-

1- أكبر من الصفر فان تلك النقطة الحرجة هي نهاية صغرى.
2- أصغر من الصفر فان تلك النقطة الحرجة هي نهاية عظمى.
3- مساوية للصفر فان تلك النقطة الحرجة هي نقطة انقلاب.

<u>مثال(1)</u>:- ارسم منحني الدالة التالية $y = x^2 + 2x + 1$

<u>الحل</u>:- $y = x^2 + 2x + 1$

1- لا يوجد تناظر للدالة .... لماذا

2- نوجد نقاط التقاطع مع محور الصادات .... $x = 0$

$y = 0 + 0 + 1 = 1$ نقطة التقاطع مع محور الصادات هي(0,1)

3- نوجد نقاط التقاطع مع محور السينات .... $y = 0$

$$y = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$x = -1$ .... $(x+1)^2 = 0$= 0 نقطة التقاطع مع محور السينات هي(-1,0)

4- نوجد النقاط الحرجة

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

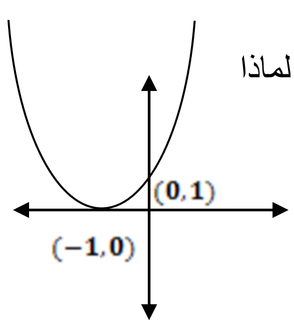
$$2(x+1) = 0$$

$$x = -1 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

إذن النقطة (-1,0) هي النقطة الحرجة الوحيدة في الدالة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$$

إذن النقطة الحرجة (-1,0) هي نهاية صغرى .... لماذا



مثال(2):- ارسم منحني الدالة التالية $y = x^3 - 3x^2$

الحل:-

1- الدالة غير متناظرة.

2-نوجد نقاط التقاطع مع المحورين.

$$at\ x = 0 \rightarrow y = 0 \ \rightarrow (0,0)$$

$$at\ y = 0 \rightarrow y = x^2(x-3) = 0 \ \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \ \rightarrow (3,0)$$

3- نوجد النقاط الحرجة

$$y^- = 3x^2 - 6x$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$3x = 0 \ \ \rightarrow x = 0 \ \ \rightarrow y = 0 \ \ \rightarrow (0,0)$$

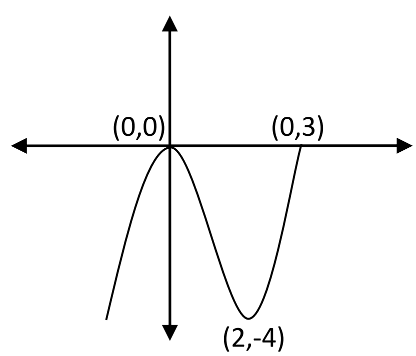
$$x - 2 = 0 \ \ \rightarrow x = 2 \ \ \rightarrow y = 8 - 12 = -4 \ \ \rightarrow (2,-4)$$

4- نختبر النقاط الحرجة

$$y^= = 6x - 6$$

$at\ (0,0) \ \ \rightarrow y^= = 6(0) - 6 = -6 \ \ \rightarrow \therefore y^= < 0$ $\therefore$ النقطة $(0,0)$ نهاعظية مى

$at\ (2,-4) \ \ \rightarrow y^= = 6(2) - 6 = 6 \ \ \rightarrow \therefore y^= > 0$ $\therefore$ النقطة $(2,-4)$ نهاية صغرى



مثال(2):- ارسم منحني الدالة التالية $y = \sin x$ للفترة $(0,2\pi)$

الحل:-

1- نوجد نقاط التقاطع مع المحورين

$$at \quad x = 0 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow (0,0)$$

$$at \quad y = 0 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \sin x = 0 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore x = 0, \pi, 2\pi \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow$$
$$(0,0), (0,\pi), (0,2\pi)$$

2- نوجد النقاط الحرجة

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad \rightarrow\rightarrow\rightarrow at \ \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore \cos x = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore y = 1\,, -1 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \ , \qquad \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

التغذية المسترجعة

4. سؤال الطالب عن وصف الشكل العام لبعض الدوال الجبرية والمثلثية.
5. سؤال الطالب عن كيفية تحديد النهايات العظمى والصغرى ونقاط التقاطع مع المحورين للدالة المطلوب رسمها.
6. سؤال الطالب عن كيفية استخدام النهايات العظمى والصغرى في رسم الدالة.
7. تكليف الطلبة بالواجب التالي:-

ارسم الدوال التالية :-

$$1 - y = x^3 - 3x$$
$$2 - y = x^4 - 4x^2$$

التكامل

1- **التكامل الغير محدد**:-

يعرف التكامل بأنه عملية إيجاد الدالة التي تم اشتقاقها ويطلق عليه أيضا عكس التفاضل أو التكامل الغير محدد.

اذا فرضنا ان $\frac{dy}{dx} = f(x)$ هي معادلة تفاضلية والمطلوب إيجاد $(y = F(x))$

نفرض ان $\frac{dy}{dx}dx = f(x)dx$

$$\int F(x)dx = F(x) + C$$

الدالة $F(x)$ تسمى عكس تفاضل الدالة $f(x)$ للفترة $|a, b|$ وان(C) يسمى ثابت التكامل ويسمى ($\int f(x)dx$) بالتكامل الغير محدد للدالة f .

قوانين التكامل:-

حيث (a) عدد ثابت و(C) هو ثابت التكامل.

$$1 - \int a.dx = ax + C$$

$$2 - \int a.x.dx = a\int x.dx = a\frac{x^2}{2} + C$$

$$3 - \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$4 - \int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$(n \neq -1)$

$$5 - \int u^n.du = \frac{u^{n+1}}{u+1} + C$$

$(n \neq -1)(u = f(x))$

القانون(5) يمثل القانون العام لتكامل الدالة الجبرية

أمثلة:

$$1 - \int 5x^3.dx = \frac{5x^4}{4} + C$$

$$2 - \int \frac{7}{x^6}.dx = \int 7x^{-6}.dx = -\frac{7x^{-5}}{5} + C$$

$$3-\int\left(4x+\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\int 4xdx+\int\frac{8dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\int 4xdx+\int 8x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$=2x^2+8*3x^{\frac{1}{3}}+C \quad =2x^2+24x^{\frac{1}{3}}+C$$

4- جد قيمة (y) اذا علمت

$$\frac{dy}{dx}=8x^3-6x^2+3x \rightarrow\rightarrow\rightarrow dy=(8x^3-6x^2+3x)dx$$

$$\int dy=\int(8x^3-6x^2+3x)dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore y= 2x^4-2x^3+3x^2+C$$

4- جد قيمة (y) من الدالة التفاضلية التالية إذا علمت إن الدالة تمر بالنقطة (-1,3)

$$\frac{dy}{dx}=4x^3-6x^{-2}$$

$$\int dy=\int(4x^3-6x^{-2})dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow y=x^4+\frac{6}{x}+C$$

$$\therefore C=y-x^4-\frac{6}{x}=3-(-1)^4-\frac{6}{(-1)}=8$$

$$\therefore y=x^4+\frac{6}{x}+8$$

$$5-\int x.(3-x^2)^3.dx$$

الحل:-لإيجاد تكامل هذه الدالة $(x.(3-x^2)^3.dx)$ يجب ان نقسمها الى قسمين احدهما الدالة المراد تكاملها $((3-x^2)^3)$بعد استيفاء شروط التكامل والثاني مشتقة $(x.dx)$ تلك الدالة.

نفرض

$$U=3-x^2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow n=3 \rightarrow\rightarrow\rightarrow dU=-2xdx$$

لكن المتوفر في الحقيقة من مشتقة الدالة فقط $(x.dx)$ والمطلوب حسب اشتقاق الدالة $(-2xdx)$.ولتكون عملية التكامل صحيحة يجب توفير كل شروط التكامل وهو الضرب في العدد 2 والقسمة عليها وكما يلي.

$$\int\frac{-2}{-2}x.(3-x^2)^3.dx=\frac{-1}{2}\int -2x.(3-x^2)^3.dx$$

في الحالة الأخيرة توفرت شروط التكامل

$$\frac{-1}{2}\int 2x.(3-x^2)^3.dx=\frac{-1}{2}\left[\frac{(3-x^2)^4}{4}\right]+C=\frac{-(3-x^2)^4}{8}+C$$

$$6-\int\frac{x^2.dx}{\sqrt[4]{(x^3+7)^3}}$$

الحل:أولا نرتب المعادلة برفع المقام الى البسط ورفع الجذر إلى أس

$$\int \frac{x^2.dx}{\sqrt[4]{(x^3+7)^3}} = \int x^2.(x^3+7)^{\frac{-3}{4}}dx$$

$$let\ U = x^3+7 \to\to\to dU = 3x^2dx\ ,\qquad n = \frac{-3}{4}$$

$$\int x^2.(x^3+7)^{\frac{-3}{4}}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2.(x^3+7)^{\frac{-3}{4}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3+7)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}\right] + C = \frac{4}{3}(x^3+7)^{\frac{1}{4}} + C$$

تكامل الدوال اللوغارتمية:- عندما تكون الدالة عبارة عن مقام(اسه واحد) ومشتقتها موجودة في البسط . او تكون الدالة ومشتقتها موجودتان في البسط لكن أس الدالة (سالب واحد).

$$\int \frac{du}{u} = \ln u \quad or \int u^{-1}du = \ln u \ \to\to\ u = f(x)$$

أمثلة: جد تكامل الدوال التالية:-

$$1 - \int \frac{3x^2dx}{x^3-4}$$

$$let\ U = x^3-4 \to\to\to dU = 3x^2dx \quad is\ exsist \quad then$$

$$\int \frac{3x^2dx}{x^3-4} = \ln x^3 - 4\ + C$$

$$2 - \int (x^4+7)^{-1}.x^3.dx$$

$$let\ U = x^4+7 \to\to\to dU = 4x^3dx \quad then$$

$$\int (x^4+7)^{-1}.x^3.dx = \frac{1}{4}\int (x^4+7)^{-1}.4x^3.dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^4+7) + C$$

تكامل الدوال الآسية :-

$$\int e^u.du = e^u + C \quad \to\to\ u = f(x)$$

أمثلة: جد تكامل الدوال التالية:-

$$1 - \int e^{x^2}.xdx \to\to\to let\ U = x^2 \to\to\to dU = 2xdx\ \ then$$

$$\int e^{x^2}.xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}.2xdx = e^{x^2} + C$$

$$2 - \int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+5} \quad let\ U = e^{3x} + 5 \to\to\to dU = e^{3x}.3dx \quad then$$

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3}\int \frac{e^{3x}.3dx}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+5) + C$$

تكامل الدوال المثلثية :-

$$1 - \int \sin u.du \quad = -\cos u + C$$

$$2 - \int \cos u.du \quad = \sin u + C$$

$$3 - \int \sec^2 u.du \quad = \tan u + C$$

$$4 - \int \csc^2 u.du \quad = -\cot u + C$$

$$5 - \int \sec u.\tan u.du \quad = \sec u + C$$

$$6 - \int \csc u.\cot u\, du \quad = -\csc u + C$$

$$7 - \int \tan u.du \quad = -\ln\cos u + C$$

$$8 - \int \cot u.du \quad = \ln\sin u + C$$

$$9 - \int \sec u.du \quad = \ln(\sec u + \tan u) + C$$

$$10 - \int \csc u.du \quad = -\ln(\csc u + \cot u) + C$$

أمثلة:-

$$1 - \int x.\cos(x^2)dx \quad \to\to\to let\ U = x^2 \to\to\to dU = 2xdx \quad then$$

$$\therefore \int x.\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2).2xdx = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

$$2 - \int e^{\sin x}.\cos x\, dx \quad \to\to\to let\ U = \sin x \to\to\to dU = \cos x\, dx \quad then$$

$$\therefore \int e^{\sin x}.\cos x.dx = e^{\sin x} + C$$

الأسئلة

$$1-\int 2x^5.dx$$

$$2-\int \left(3-\frac{7}{\sqrt[5]{x^4}}\right)dx$$

$$3-\int e^{2x^3}.x^2dx$$

$$4-\int (x^2-3)^{-1}.x.dx$$

$$5-\int \csc x^2.\cot x^2.x\,dx$$

2- التكامل المحدد:-

اذا كانت (a , b) واقعة في الفترة (A , B) وكانت (F) هي عكس تفاضل الدالة (f) ، وان (b > a).

فان $\left(\int_a^b f\right)$ يعرف كما يلي $\int_a^b f(x).dx = F_b - F_a$

يسمى $\left(\int_a^b f\right)$ بالتكامل المحدد للدالة (f) ، وتسمى (a) بالحد الأدنى للتكامل و (b) بالحد الأعلى للتكامل.

ملاحظة: التكامل المحدد خالي من ثابت التكامل (C).

مثال(1):جد ناتج التكامل $\int_{-1}^{2}(x-3).dx$

$$=\tfrac{1}{2}(x-3)^2\Big]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}[(2-3)^2-(-1-3)^2] = 1-16 = -7.5$$

مثال(2):جد ناتج التكامل $\int_0^1 e^{x^3}.x^2.dx$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{x^3}.3x^2.dx = \frac{1}{3}e^{x^3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\left(e^{1^3}-e^{0^3}\right) = \frac{1}{3}(2.3-1) = \frac{1.3}{3}$$

مثال(3):جد ناتج التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 4\theta\,.d\theta$

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 4\theta\,.4d\theta = -\tfrac{1}{4}\cos 4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\left(\tfrac{4\pi}{8}\right)-\cos(0)\right) = =$$
$$-\frac{1}{4}(0-1) = \frac{1}{4}$$

مثال(4):جد ناتج التكامل $\int_0^6 \frac{dx}{(x+5)}$

$$=\int_0^6 (x+5)^{-1}.dx = \ln(x+5)]_0^6 = \ln(6+5)-\ln(0+5) = 2.4-1.6 =$$
$$0.8$$

أسئلة: جد ناتج التكاملات التالية

$1-\int_{-1}^{2}(4x+5).dx$

$2-\int_{0}^{1}e^{3x^{2}-6x}.(x-1).dx$

$3-\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,.d\theta$

$4-\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{6}}\frac{\boldsymbol{(x^{2}+3)dx}}{\boldsymbol{(x^{3}+9x)}}$

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

أهداف الوحدة

سيكـون الـطالب بعـد دراستـهِ لهـذه الـمادة قـادراً عـلى :

1- فهم معنى المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى بأنواعها.
2- حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المنفصلة المتغيرات.
3- حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المتجانسة المتغيرات.
4-

أولا:-المعادلات التفاضلية المنفصلة المتغيرات:-

الصيغة العامة لهذه المعادلة هي $\frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$

حيث يوضع (y^-)بدلالة حاصل ضرب دالتي

f(x) تمثل دالة لـ (x) فقط

g(y) تمثل دالة لـ (y) فقط

الحل يتم بضرب طرفي المعادلة بـ ($\frac{dx}{g(y)}$) فنحصل على

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

بتكامل طرفي المعادلة ينتج

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x).dx + A$$

(A) يمثل ثابت اختياري للتكامل

امثلة:- حل المعادلات التفاضلية الاتية:-

$$1 - \frac{dy}{dx} = x \quad , \quad f(x) = x \quad , \quad g(y) = 1$$

بضرب طرفي المعادلة بـ ($\frac{dx}{g(y)}$)

$$\int dy = \int x dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore y = \frac{1}{2}x^2 + A$$

هذا الحل يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$2 - \quad \frac{dy}{dx} = y \quad , \quad f(x) = 1 \quad , \quad g(y) = y$$

$$\therefore \int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore \ln y = x + A$$

$$y = e^{x+a} + B \quad \rightarrow\rightarrow B = e^a$$

$$3 - \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$ydy = xdx \rightarrow\rightarrow\rightarrow \int ydy = \int xdx$$

$$\therefore \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + A \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad y^2 = x^2 + B \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow B = 2A$$

$$4 - \frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.e^y \rightarrow\rightarrow\rightarrow \ e^{-y}.dy = e^{2x}.dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow \int e^{-y}.dy = \int e^{2x}.dx$$

$$\therefore -e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + A$$

هذا الحل يمثل الحل العام ولإيجاد الحل الخاص عند الشروط التالية المعطاة(x=0 ,y=0)

$$-e^{-0} = \frac{1}{2}e^{2*0} + A° \rightarrow\rightarrow\rightarrow -1 = 0.5 + A \rightarrow\rightarrow \therefore A = -1.5$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - 1.5 \rightarrow\rightarrow\rightarrow e^{-y} = -\left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1.5\right)$$

$$-y = \ln\left[-\left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1.5\right)\right] \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore y = -\ln\left[-\left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1.5\right)\right]$$

الحل الأخير يمثل الحل الخاص للمعادلة التفاضلية.

$$5 - \frac{dy}{dx} = -2x.\tan y \quad \rightarrow \quad at\ x = 0\ , y = 2\pi$$

$$\frac{dy}{\tan y} = -2xdx \rightarrow\rightarrow\rightarrow \int \frac{dy}{\tan y} = \int -2xdx \rightarrow\rightarrow \int \cot y = \int -2xdx$$

$$\therefore \ln\sin y = -x^2 + A$$

هذا يمثل الحل العام ويمكن ايجاد الحل الخاص عند الشروط التي ذكرت اعلاه

$$\ln\sin 2\pi = -(0)^2 + A \rightarrow\rightarrow\rightarrow A = \ln 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow A = 0$$

$$\therefore \ln\sin y = -x^2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \sin y = e^{-x^2}$$

ثانيا: المعادلات الرياضية المتجانسة:-

الصيغة العامة لهذه المعدلة هي

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots\ldots(1)$$

$$let\ v = \frac{y}{x} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore y = vx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots(2)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(v) \ \ldots\ldots(3)$$

$$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

امثلة:- حل المعادلات التفاضلية الاتية:-

$$1- \ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x.y}$$

الحل:نقسم البسط والمقام على (x^2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\because \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \ \because v = \frac{y}{x}$$

$$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + v \ \rightarrow\rightarrow\rightarrow \ x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$\therefore \int vdv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \ln x + A \rightarrow\rightarrow\rightarrow \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = \ln x + A$$

$$y^2 = 2x^2.\ln x + B$$

$$2-\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} \rightarrow\rightarrow\rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\frac{1-v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{1+v^2} - \int \frac{vdv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$tan^{-1}(v) - \tfrac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln x + A$$

$$tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tfrac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln x + A$$

$$3 - \ \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}} = -\frac{1+v^2}{2v}$$

$$\therefore\ v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{1+v^2}{2v} - \frac{v^2}{v} = -\frac{1+v^2+2v^2}{2v} = -\frac{1+3v^2}{2v}$$

$$\frac{2vdv}{1+3v^2} = -\frac{dx}{x} \to\to\to -\int \frac{2vdv}{1+3v^2} + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\tfrac{1}{3}\ln(1+3v^2) + \ln x = A$$

$$\tfrac{1}{3}\ln\left(1+3\left(\tfrac{y}{x}\right)^2\right) + \ln x = A$$

$$4 - x^2dy + (y^2 - xy)dx = 0$$

$$x^2dy = (xy - y^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(xy-y^2)}{x^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = v - v^2$$

$$\therefore\ v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2 \to\to\to x\frac{dv}{dx} = -v^2$$

$$-\frac{dv}{v^2}=\frac{dx}{x}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\int v^{-2}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\therefore v^{-1}=\ln x+A\rightarrow\rightarrow\rightarrow\frac{x}{y}=\ln x+A$$

$$y=\frac{x}{\ln x+A}$$

التغذية المسترجعة

4- سؤال الطلبة عن معنى المعادلات التفاضلية .
5- سؤال الطلبة عن طريقة حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المنفصلة والمتجانسة المتغيرات.

تكليف الطلبة بالواجب التالي.

$$1-\frac{dy}{dx}=e^x$$

$$2-\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

تطبيقات التكامل الهندسية

أولا:المساحة تحت المنحني

إذا كانت (f) دالة مستمرة على الفترة (a,b) وغير سالبة $(f \geq 0)$ فان مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة (f) ومحور السينات والمستقيمين $(x = a , x = b)$ هي (A).

قانون المساحة:

$$A\,\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} = \int_a^b f(x)dx = F(x)]\,\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} = f(b) - f(a)$$

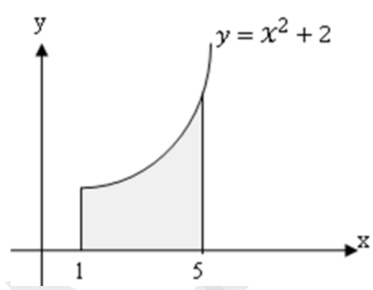
وممكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$A\,\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} = \int_a^b y.dx$$

قانون المساحة تحت المنحني مع محور الصادات هي

$$A\,\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} = \int_{y=a}^{y=b} x.dx$$

مثال(1):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني$(y = x^2 + 2)$ ومحور السينات والمستقيمين $(x = 1 ,x = 5)$



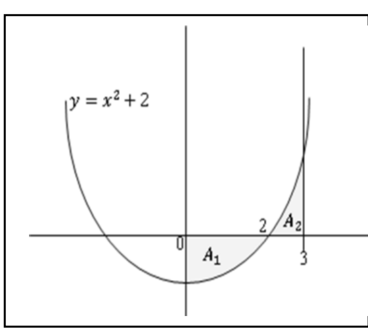
الحل:

$$\int_1^5 (x^2 + 2).dx = \frac{x^3}{3} + 2x]\,\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$$

$$-\left(\frac{1^3}{3} + 2 * 1\right) = 51.7 - 2.3 = 49.4(unit)^2$$

مثال(2):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني$(y = x^2 - 2)$ ومحور السينات والمستقيمين $(x = 0 ,x = 3)$

الحل:



نقاط التقاطع مع محور السينات (0,2),(0,-2)

لدينا مساحتين هما 1- المحصورة بين المنحني والمحورين للفتر

2- المحصورة بين المنحني والمحور السيني والمستقيم(x=3) لل

$$= A_1 + A_2 = \int_0^2 (x^2 - 2).dx + \int_2^3 (x^2 - 2).dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} + 2x]\,\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} + \frac{x^3}{3} + 2x]\,\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$= \left|\left(\frac{2^3}{3} + 2*2\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 2*0\right)\right| + \left|\left(\frac{3^3}{3} + 2*3\right) - \left(\frac{2^3}{3} + 2*2\right)\right|$$

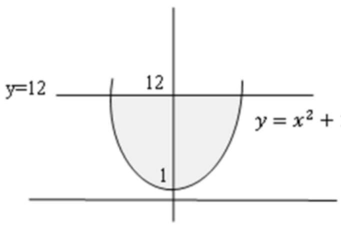
$$= |(6.7) - (0)| + |(15) - (6.7)| = 15(unit)^2$$

مثال(3):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $(y = x^2 + 1)$ ومحور الصادات والمستقيم (y= 12)

الحل

$$A = \int_a^b x.dy$$

$$y = x^2 + 1 \qquad \to \to \therefore x = \sqrt{y+1} = (y-1)^{\frac{1}{2}}$$



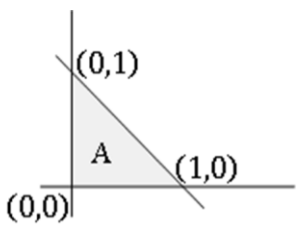
نوجد نقاط التقاطع مع محور الصادات $\to\to y = 1$)

$$A = \int_1^{12} (y-1)^{\frac{1}{2}}.dy = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{12}$$

$$2 - 1)^{\frac{3}{2}}\big|\big) \frac{2}{3}\left(\left|0 - (12-1)^{\frac{3}{2}}\right|\right) = 24.3(unit)^2$$

مثال(4):احسب المساحة المحصورة بين المستقيم $(x + y = 1)$ والمحورين.

الحل: نوجد نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين



$$= 0 \to\to y = 1 \ \to\to (0,1)$$

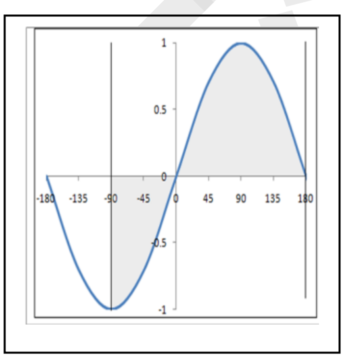
$$= 0 \ \to\to x = 1 \ \to\to (1,0)$$

$$x = A = \int_0^1 (1-x).dx = (x - x^2)|_0^1$$

0

$$= \left|\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right| = \left|\left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}(unit)^2$$

مثال(5):احسب المساحة المحصورة بين منحني الدالة $(y = \sin x)$ ومحور السينات للفترة $([-\frac{\pi}{2}, \pi])$.



الحل: نوجد نقاط التقاطع مع محور السينات للفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$sinx = 0 \ \to\to \therefore x = sin^{-1}0 = 0, \pi$$

$$x = sin^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \to\to \quad x = sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

لذا تقسم المساحة الى قسمين

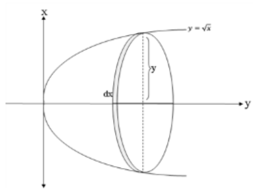
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sinx\,.dx + \int_0^{\pi} sinx\,.dx$$

$$A = -cosx|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + (-cosx|_{0}^{\pi})$$

$$= \left|-cos(0) - cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| + |-cos(\pi) - cos(0)|$$

$$= |-1 - 0| + |-1 - 1| = 3(unit)^2$$

ثانيا:الحجوم الدورانية



1- طريقة الشرائح(القرص)

$$v = \int A_{(x)} \, . dx$$

سمك القرص= الارتفاع باتجاه محور الدوران= dx

الحجم= مساحة القرص*الارتفاع باتجاه محور الدوران.فاذا كان الدوران حول محور السينات فان

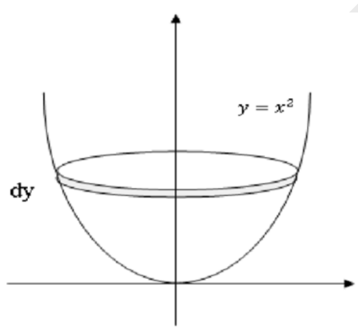
$$v = \int \pi . y^2 \, . dx$$

<u>مثال (1)</u>: جد الحجم الناتج من دوران المنحني ($y = \sqrt{x}$) من النقطة (0,0)الى(4,2).اذا كان الدوران حول محور السينات.

$$v = \int A_{(x)} \, . dx = \int \pi . y^2 \, . dx$$

$$v = \int \pi . x . dx = \pi \left|\frac{x^2}{2}\right| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} = \pi \left|\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right| = 8\pi$$

ملاحظة؛ إذا كان الدوران حول محور الصادات فان الحجم يكون كما يلي



$$v = v = \int A_{(y)} \, . dy = \int \pi . x^2 . dy$$

نصف قطر القرص=x

سمك القرص=dy

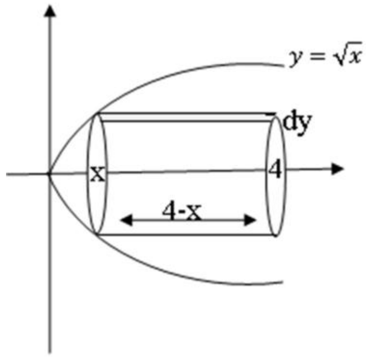
<u>مثال(2):</u> جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني ($y = x^2$)والمستقيم (y=4). إذا كان الدوران حول محور الصادات.

$$v = \int_0^4 \pi . x^2 . dy = \pi \int_0^4 y . dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right] \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} = \pi \left[\frac{16}{2} - 0\right] = 8\pi$$

2- طريقة الاسطوانة

مثال(1):أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة تحت المنحني $(y = \sqrt{x})$ من النقطة (0,0)الى(4,2).اذا كان الدوران حول محور السينات.



الحل:نأخذ شريحة موازية لمحور السينات

نصف قطر الاسطوانة= y ،سمك القشرة= dy

ارتفاع الاسطوانة = طول الاسطوانة = 4-x

الحجم= 2ط (نق*ع*د(ع))

$$v = \int_0^2 2\pi y.(4 - x)dy = \int_0^2 2\pi y.(4 - y^2)dy$$

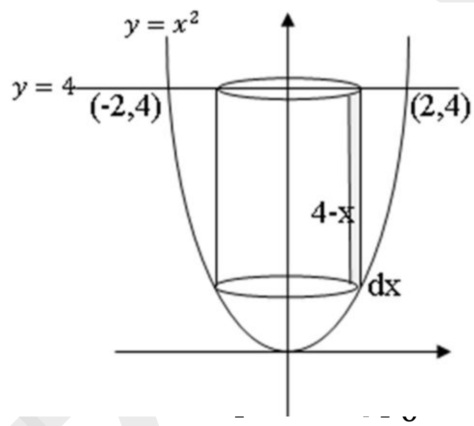
$$= 2\pi \int_0^2 (4y - y^3)dy = 2\pi \left[\frac{4y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \left[2 * 2^2 - \frac{2^4}{4} - 0\right]$$

$$= 8\pi$$

مثال(2): جد الحجم الناتج من دورانالمساحة المحصورة بين المنحني $(y = x^2)$والمستقيم (y=4). اذا كان الدوران حول محور الصادات.

الحل:

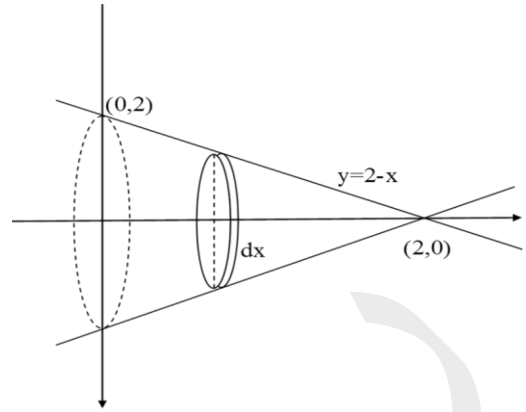
سمك القشرة= dx
نصف قطر القاعدة=x
ارتفاع الاسطوانة= 4-x



$$v = \int_0^2 2\pi.x(\quad x$$
$$= 2\pi \int_0^2 (4x -$$

$$2\pi \left[2 * 2^2 - \frac{2^4}{4} - 0\right] = 8\pi$$

مثال(3): أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المستقيم $(x-2)$ والمحورين اذا كان الدوران حول محور السينات.



$$v = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4-4x+x^2)^2 dx$$

$$= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}2\\0\end{matrix}$$

$$= \pi \left[4(2) - 2(2)^2 + \frac{(2)^3}{3} - 0\right] = \tfrac{8}{3}\pi$$

ثانيا:حساب طول قوس المنحني

قوانين طول قوس المنحني:-

$$1 - L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx$$

$$2 - \ L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ .dy$$

$$3 - L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,.\,dt$$

مثال:- جد طول قوس المنحني $(y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}})$ من (x=1) الى (x=4).

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{2}{3}.\tfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{-1}{3}} = (x-1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left((x-1)^{\frac{-1}{2}}\right)^2}\,.\,dx$$

$$\int_1^4 \sqrt{1+x-1}\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]\begin{matrix}4\\1\end{matrix} = \tfrac{2}{3}(4)^{1.5} - \tfrac{2}{3}(1)^{1.5} = \frac{14}{3}$$

مثال:جد طول قوس المنحني الذي تتحركه النقطة (x,y) على محيط دائرة نصف قطرها (r) اذا علمت ان (x=r.cos u)، (y=r.sin u) من (u=0) الى (u=2Π).

الحل:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ .\ du$$

$$\frac{dx}{du} = -r.\sin u \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{dy}{du} = r.\cos u$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (-r.\sin u)^2 + (r.\cos u)^2 = r^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = r^2$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}.\ du \ = \int_0^{2\pi} r.du \ = r.u\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

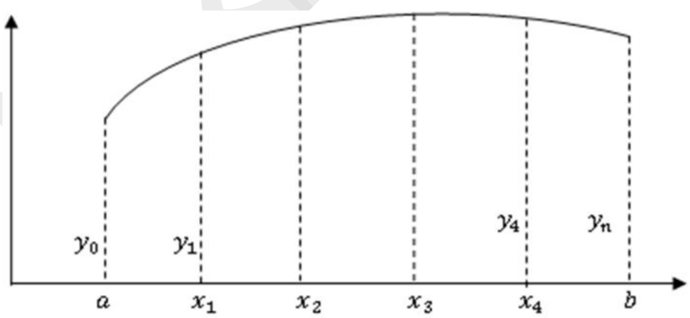
ثالثا:تقريب التكامل

اولا: قاعدة شبه المنحرف:إذا كان المطلوب القيمة التقريبية (T) للتكامل($\int_a^b f(x).dx$) فان:

$$T = \left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots \ldots \ldots \ldots + \tfrac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_n = f(x_n)$$

n= عدد التقسيمات(يمكن ان تكون زوجية او فردية)



ملاحظة: 1- اذا كانت الدالة محدبة فان القيمة التقريبية (T) تكون اصغر من القيمة الحقيقية.

2 - اذا كانت الدالة مقعرة فان القيمة التقريبية (T) تكون اكبر من القيمة الحقيقية.

مثال:استخدم قاعدة شبه المنحرف معتبرا(n=4) لحساب قيمة ($\int_1^2 \quad {}^2 dx$) وقارن الناتج مع القيمة الحقيقية للتكامل.

الحل:1- القيمة الحقيقية هي

$$\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 2.333$$

3- القيمة التقريبية هي:

$$T = \left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \tfrac{1}{2}y_4\right)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x_0 = a = 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_0 = (1)^2 = 1$$

$$x_1 = a + \Delta x = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_2 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$x_4 = x_3 + \Delta x = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 4 = b \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_4 = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = \frac{64}{16} = 4$$

$$T = \left(\tfrac{1}{2}(1) + \left(\frac{25}{16}\right) + \left(\frac{36}{16}\right) + \left(\frac{49}{16}\right) + \tfrac{1}{2}(4)\right)\frac{1}{4}$$

$$T = \frac{78}{8} * \frac{1}{4} = 2.343$$

أسئلة:جد القيمة التقريبية للتكاملات التالية باستخدام طريقة شبه المنحرف

$$1 - \int_0^2 xdx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$$

$$2 - \int_1^4 x^3dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 3$$

$$3 - \int_0^4 \sqrt{x}dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$$

$$4 - \int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 6$$

ثانيا:قاعدة سمبسون لتقريب التكامل:

لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل (S)بهذه الطريقة نستخدم القانون التالي:

$$S = \frac{1}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots)]\Delta x$$

في هذه الطريقة يجب أن يكون عدد التقسيمات(n) عدد زوجي.

مثال:بطريقة سمبسون جد القيمة التقريبية للتكامل ($\int_1^5 x^2 dx$) معتبرا (n=4).

الحل:1- القيمة الحقيقية هي

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 41.33333$$

$$\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_0 = a = 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_0 = (1)^2 = 1$$

$$x_1 = a + \Delta x = 1 + 1 = 2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_1 = (2)^2 = 4$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 2 + 1 = 3 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_2 = (3)^2 = 9$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 3 + 1 = 4 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_3 = (4)^2 = 16$$

$$x_4 = x_3 + \Delta x = 4 + 1 = 5 = b \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_4 = (5)^2 = 25$$

$$S = \frac{1}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots)]\Delta x$$

$$S = \frac{1}{3}[(1 + 25) + 4(4 + 16) + 2(9)] * 1$$

$$S = \frac{1}{3}[(26) + 80 + 18] = \frac{124}{3} = 41.333$$

أسئلة: بطريقة سمبسون جد القيمة التقريبية للتكاملات السابقة مع تحديد الأسئلة التي لا يمكن حلها ولماذا.

$$1 - \int_0^2 x dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$$

$$2 - \int_1^4 x^3 dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 3$$

$$3 - \int_0^4 \sqrt{x} dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$$

$$4 - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 6$$

التطبيقات الفيزياوية للتكامل

استخدام التكامل المحدد في التطبيقات الفيزيائية كالمسافة والشغل وغيرها.

أولا:المسافة:- المسافة التي يقطعها جسم متحرك بسرعة $(v = f(t))$ هي دالة للسرعة اذا كانت $(f(t))$ موجبة ومستمرة للفترة $(a \leq x \leq b)$ لكي يكون الجسم يتحرك باتجاه واحد ولا يعود للخلف.

$$\therefore v = \frac{ds}{dt} \rightarrow\rightarrow \therefore ds = v.dt \rightarrow\rightarrow \therefore s = \int_a^b v.dt$$

مثال:- جد المسافة التي يقطعها جسم يتحرك بسرعة تمثلها الدالة $(v = 5t + 3)$للفترة $(0 \leq x \leq 2)$.

الحل:-

$$s = \int_0^2 v.dt = \int_0^2 (5t+3).dt = \frac{5}{2}t^2 + 3t \Big|_0^2 = 10 + 6 = 16m$$

ثانيا:الشغل:- هو حاصل ضرب القوة في المسافة باتجاه القوة

الشغل= القوة *المسافة باتجاه القوة

في بعض الحالات تتغير القوة بتغير المسافة كما في المكبس او النابض .ففي هذه الحالة يحسب الشغل بطرقة التكامل حيث تكون القوة دالة للمسافة المقاسة من نقطة ابتداء حركة القوة(F).والشغل الناتج (W) للمسافة المقطوعة من(x=a)الى (x=b)هو

$$w = \int_a^b F(x)dx$$

مثال:- القوة اللازمة لسحب نابض حلزوني مسافة $(x\ cm)$هي $(F = 64x)$نيوتن .جد الشغل اللازم لاستطالة النابض$(6\ cm)$.

$$w = \int_0^6 64\,x\,dx = 32x^2 \Big|_0^6 = 32 * 36 = 1132\ J$$

مثال:- الشغل الناتج من تمدد غاز بين ضغطين مختلفين $(w = \int p.dv)$.جد الشغل الناتج من تمدد الغاز من $(v = 1m^3)$ الى $(v = 32m^3)$ علما ان $(p.v^{1.4} = 1)$.

الحل:-

$$w = \int_1^{32} p.dv \quad \rightarrow\rightarrow p = v^{-1.4}$$

$$\therefore w = \int_1^{32} v^{-1.4}.dv = -\frac{v^{-0.4}}{0.4}\Big|_1^{32}$$

$$= \frac{-1}{0.4}[32^{-0.4} - 1^{-0.4}] = -2.5 * (-0.75) = 1.875J$$

أسئلة

1- جد المسافة التي يقطعها جسم يتحرك بسرعة تمثلها الدالة $(v = 4t - 2)$للفترة $(1 \le x \le 3)$.

2- القوة اللازمة لسحب نابض حلزوني مسافة $(x\ cm)$هي $(F = 30\ cm)$نيوتن .جد الشغل اللازم لاستطالة النابض$(2\ cm)$.

3- الشغل الناتج من تمدد غاز بين ضغطين مختلفين $(w = \int p.dv)$.جد الشغل الناتج من تمدد الغاز من $(v = 1m^3)$ الى $(v = 16m^3)$ علما ان $(p.v^{1.3} = 1)$.

تطبيقات التكامل الهندسية

أولا:المساحة تحت المنحني

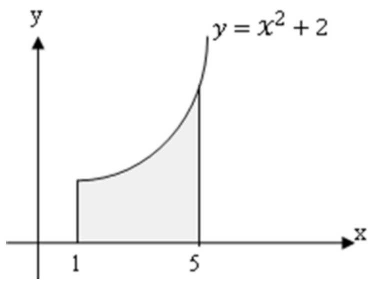
إذا كانت (f) دالة مستمرة على الفترة (a,b) وغير سالبة $(f \geq 0)$ فان مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة (f) ومحور السينات والمستقيمين (x = a , x = b) هي (A).

قانون المساحة: $A_a^b = \int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

وممكن كتابتها بالصيغة التالية: $A_a^b = \int_a^b y.dx$

قانون المساحة تحت المنحني مع محور الصادات هي $A_a^b = \int_{y=a}^{y=b} x.dy$

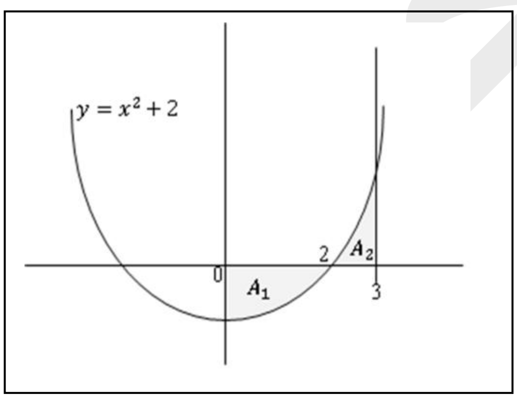
مثال(1):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني$(y = x^2 + 2)$ ومحور السينات والمستقيمين (x = 1 , x = 5)



الحل: $\ldots_1^5 y.dx = \int_1^5 (x^2+2).dx = \frac{x^3}{3} + 2x]_1^5$

$\ldots + 2 * 5) - \left(\frac{1^3}{3} + 2 * 1\right) = 51.7 - 2.3 = 49.4(unit)^2$

مثال(2):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني$(y = x^2 - 4)$ ومحور السينات والمستقيمين (x = 0 ,x = 3)



نقاط التقاطع مع محور السينات (0,2),(0,-2)

لدينا مساحتين هما 1- المحصورة بين المنحني والمحورين للفترة (0,2)

2- المحصورة بين المنحني والمحور السيني والمستقيم(x=3) للفترة (2,3)

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 (x^2 - 4).dx + \int_2^3 (x^2 - 4).dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} + 4x\Big]_0^2 + \frac{x^3}{3} + 4x\Big]_2^3$$

$$= \left|\left(\frac{2^3}{3} + 4 * 2\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 4 * 0\right)\right| + \left|\left(\frac{3^3}{3} + 4 * 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} + 4 * 2\right)\right|$$

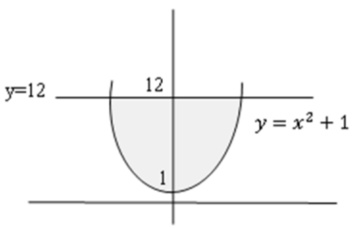
$$= |(10.7) - (0)| + |(21) - (10.7)| = 21(unit)^2$$

مثال(3):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $(y = x^2 + 1)$ ومحور الصادات والمستقيم (y= 12)

الحل

$$A = \int_a^b x.dy$$

$$y = x^2 + 1 \qquad \rightarrow\rightarrow \therefore\ x = \sqrt{y-1} = (y-1)^{\frac{1}{2}}$$

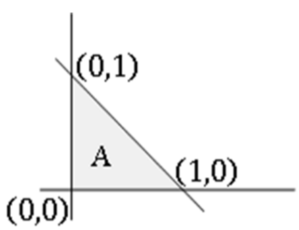


نوجد نقاط التقاطع مع محور الصادات $t\ x = 0 \quad \rightarrow\rightarrow y = 1$

$$A = \int_1^{12} (y-1)^{\frac{1}{2}}.dy \ = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{12}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left|(1-1)^{\frac{3}{2}} - (12-1)^{\frac{3}{2}}\right|\right) \frac{2}{3}\left(\left|0 - (12-1)^{\frac{3}{2}}\right|\right)$$

$$= 24.3(unit)^2$$



مثال(4):احسب المساحة المحصورة بين المستقيم $(x + y = 1)$ واله

الحل: نوجد نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين

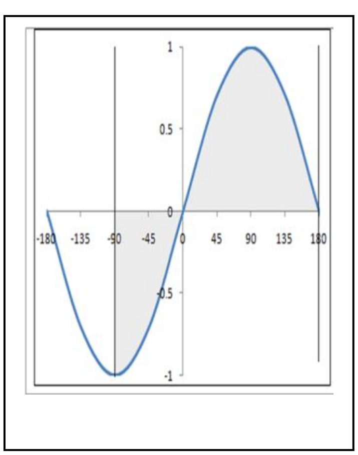
$$t\ x = 0 \rightarrow\rightarrow y = 1 \quad \rightarrow\rightarrow (0,1)$$

$$t\ y = 0 \rightarrow\rightarrow x = 1 \quad \rightarrow\rightarrow (1,0)$$

$$A = \int_0^1 y.dx = A = \int_0^1 (1-x).dx = (x - x^2)\Big|_0^1$$

$$= \left|\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right| = \left|\left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}(unit)^2$$

مثال(5):احسب المساحة المحصورة بين منحني الدالة $(y = \sin x)$ ومحور السينات للفترة $\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$.



الحل: نوجد نقاط التقاطع مع محور السينات للفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$sinx = 0 \ \rightarrow\rightarrow \therefore\ x = sin^{-1}0 = 0, \pi$$

$$x = sin^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\rightarrow\rightarrow \ x = sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

لذا تقسم المساحة الى قسمين

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sinx\,.\,dx + \int_{0}^{\pi} sinx\,.\,dx$$

$$A = -cosx|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + (-cosx|_{0}^{\pi}) = \left|-cos(0) - cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| + |-cos(\pi) - cos(0)|$$

$$= |-1 - 0| + |-1 - 1| = 3(unit)^2$$

مثال(6):جد المساحة المحصورة بين المنحني $(y = x^2)$ والمستقيم $(y = x)$

الحل:

1- نوجد نقاط بين المستقيم والمنحني

$$y = x^2$$
$$y = x$$

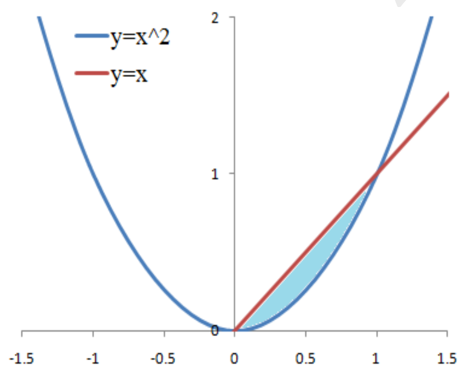
$$0 = x^2 - x \;\rightarrow\rightarrow\; x(x-1) = 0$$

$$if\ x = 0 \rightarrow\rightarrow y = 0 \quad ,(0,0)$$

$$or\ x - 1 = 0 \;\rightarrow\rightarrow x = 1 \rightarrow\rightarrow y = 1 \quad ,(1,1)$$

$$\therefore A = \int_{0}^{1} (x^2 - x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} = \left|\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{2}\right)\right|$$

$$= 0.222(unit)^2$$



اسئلة

(1):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني$(y = x^2 + 4)$ ومحور السينات والمستقيمين (x = 0 ,x = 3)

(2):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني$(y = x^2 - 9)$ ومحور السينات والمستقيمين (x = 0 ,x = 5)

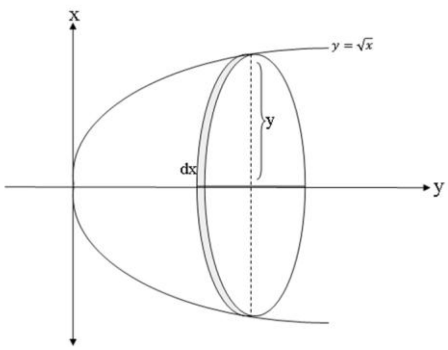
(3):جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $(y = x^2 - 6)$ ومحور الصادات والمستقيم (y= 0)

(4):احسب المساحة المحصورة بين المستقيم $(x - y = -1)$ والمحورين.

(5):احسب المساحة المحصورة بين منحني الدالة $(y = \cos x)$ ومحور السينات للفترة $(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right])$.

(6):جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $(y = x^2 - 1)$ و $(y = 3 - x^2)$

ثانيا:الحجوم الدورانية



1- طريقة الشرائح(القرص)

$$v = \int A_{(x)} \, . dx$$

سمك القرص= الارتفاع باتجاه محور الدوران= dx

الحجم= مساحة القرص*الارتفاع باتجاه محور الدوران.فاذ

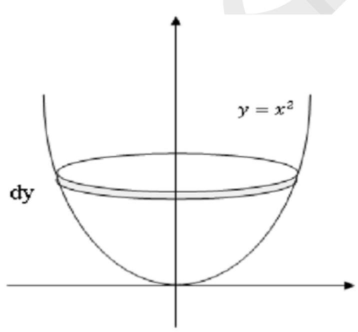
$$= \int \pi . y^2 \, . dx$$

<u>مثال (1)</u>: جد الحجم الناتج من دوران المنحني $(y = \sqrt{x})$ من النقطة (0,0)الى(4,2).اذا كان الدوران حول محور السينات.

$$v = \int A_{(x)} \, . dx = \int \pi . y^2 \, . dx$$

$$v = \int \pi . x . dx = \pi \left| \frac{x^2}{2} \right| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} = \pi \left| \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right| = 8\pi$$

ملاحظة؛ إذا كان الدوران حول محور الصادات فان الحجم يكون كما يلي



$$v = v = \int \; A_{(y)} \, . dy = \int \; \pi . x^2 . dy$$

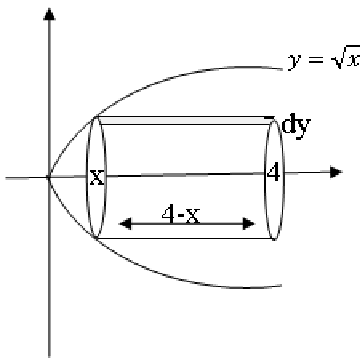
نصف قطر القرص=x

سمك القرص=dy

مثال(2): جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني ($y = x^2$)والمستقيم (y=4). إذا كان الدوران حول محور الصادات.

$$v = \int_0^4 \pi . x^2 . dy = \pi \int_0^4 y . dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = \pi \left[\frac{16}{2} - 0\right] = 8\pi$$



2- طريقة الاسطوانة

مثال(1):أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة تحت المنحني ($y = \sqrt{x}$) من النقطة (0,0)الى(4,2).اذا كان الدوران حول محور السينات.

الحل:نأخذ شريحة موازية لمحور السينات

نصف قطر الاسطوانة= y ،سمك القشرة= dy

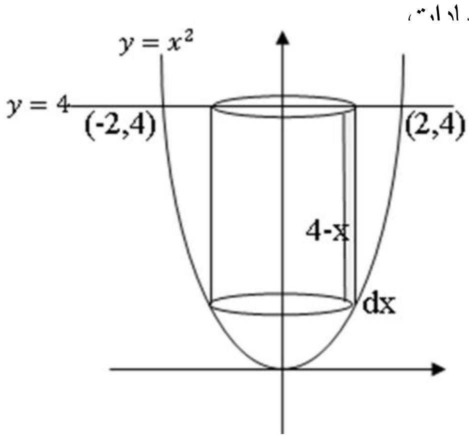
ارتفاع الاسطوانة = طول الاسطوانة = 4-x

الحجم= 2ط (نق*ع*د(ع))

$$v = \int_0^2 2\pi y . (4 - x) dy = \int_0^2 2\pi y . (4 - y^2) dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4y - y^3) dy = 2\pi \left[\frac{4y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \left[2 * 2^2 - \frac{2^4}{4} - 0\right] = 8\pi$$

مثال(2): جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني ($y = x^2$)والمستقيم (y=4). اذا كان الدوران حول محور الصادات.



الحل:

سمك القشرة= dx

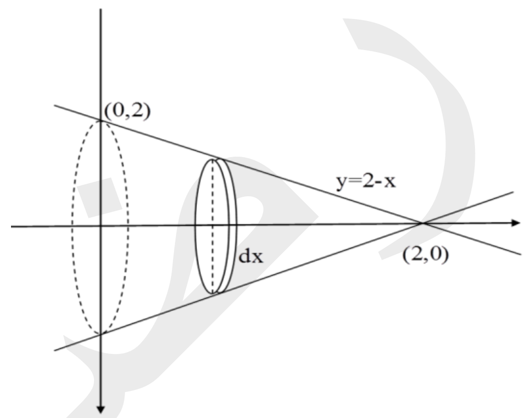
نصف قطر القاعدة=x

ارتفاع الاسطوانة= 4-x

$v = \int_0^2 2\pi . x(4-y). dx = \int_0^2 2\pi . x(4-x^2). dx$
$= 2\pi \int_0^2 (4x - x^3). dx = 2\pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$

$2\pi \left[2 * 2^2 - \frac{2^4}{4} - 0\right] = 8\pi$

مثال(3): أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المستقيم $(2-x)$ والمحورين اذا كان الدوران حول محور السينات.



$v = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx$

$= \pi \int_0^2 (4 - 4x + x^2)^2 dx$

$= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= \pi \left[4(2) - 2(2)^2 + \frac{(2)^3}{3} - 0\right] = \frac{8}{3}\pi$

ثانيا:حساب طول قوس المنحني

قوانين طول قوس المنحني:-

$1 - L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx$

$2 - L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} . dy$

$3 - L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} . dt$

مثال:- جد طول قوس المنحني $(y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}})$ من (x=1) الى (x=4).

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x-1)^{\frac{-1}{3}} = (x-1)^{\frac{-1}{2}}$

$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left((x-1)^{\frac{-1}{2}}\right)^2} . dx$

$\int_1^4 \sqrt{1 + x - 1}\, dx = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(4)^{1.5} - \frac{2}{3}(1)^{1.5} = \frac{14}{3}$

مثال:جد طول قوس المنحني الذي تتحركه النقطة (x,y) على محيط دائرة نصف قطرها (r) اذا علمت ان (x=r.cos u)، (y=r.sin u) من (u=0) الى (u=2Π).

الحل:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ .\ du$$

$$\frac{dx}{du} = -r.\sin u \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{dy}{du} = r.\cos u$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (-r.\sin u)^2 + (r.\cos u)^2 = r^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = r^2$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}.\ du = \int_0^{2\pi} r.du = r.u\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

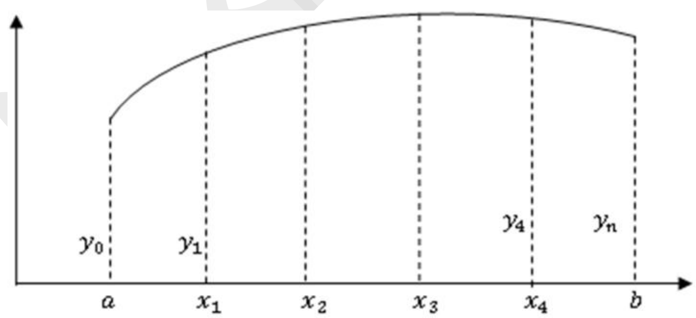
ثالثا:تقريب التكامل

اولا: قاعدة شبه المنحرف :إذا كان المطلوب القيمة التقريبية (T) للتكامل($\int_a^b f(x).dx$) فان:

$$T = \left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots \dots \dots \dots + \tfrac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_n = f(x_n)$$

n= عدد التقسيمات(يمكن ان تكون زوجية او فردية)



ملاحظة: 1- اذا كانت الدالة محدبة فان القيمة التقريبية (T) تكون اصغر من القيمة الحقيقية.

2 - اذا كانت الدالة مقعرة فان القيمة التقريبية (T) تكون اكبر من القيمة الحقيقية.

مثال:استخدم قاعدة شبه المنحرف معتبرا(n=4) لحساب قيمة ($\int_1^2 \quad {}^2 dx$) وقارن الناتج مع القيمة الحقيقية للتكامل.

الحل:1- القيمة الحقيقية هي

$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 2.333$

3- القيمة التقريبية هي:

$T = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)\Delta x$

$\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$x_0 = a = 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_0 = (1)^2 = 1$

$x_1 = a + \Delta x = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_2 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$

$x_3 = x_2 + \Delta x = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$

$x_4 = x_3 + \Delta x = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 4 = b \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_4 = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = \frac{64}{16} = 4$

$T = \left(\frac{1}{2}(1) + \left(\frac{25}{16}\right) + \left(\frac{36}{16}\right) + \left(\frac{49}{16}\right) + \frac{1}{2}(4)\right)\frac{1}{4}$

$T = \frac{78}{8} * \frac{1}{4} = 2.343$

أسئلة:جد القيمة التقريبية للتكاملات التالية باستخدام طريقة شبه المنحرف

$1 - \int_0^2 x dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$

$2 - \int_1^4 x^3 dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 3$

$3 - \int_0^4 \sqrt{x} dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$

$4 - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 6$

ثانيا:قاعدة سمبسون لتقريب التكامل:

لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل (S)بهذه الطريقة نستخدم القانون التالي:

$$S = \frac{1}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots)]\Delta x$$

في هذه الطريقة يجب أن يكون عدد التقسيمات(n) عدد زوجي.

مثال:بطريقة سمبسون جد القيمة التقريبية للتكامل ($\int_1^5 x^2 dx$) معتبرا (n=4).

الحل:1- القيمة الحقيقية هي

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big| \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 41.33333$$

$$\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_0 = a = 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_0 = (1)^2 = 1$$

$$x_1 = a + \Delta x = 1 + 1 = 2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_1 = (2)^2 = 4$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 2 + 1 = 3 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_2 = (3)^2 = 9$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 3 + 1 = 4 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_3 = (4)^2 = 16$$

$$x_4 = x_3 + \Delta x = 4 + 1 = 5 = b \rightarrow\rightarrow\rightarrow y_4 = (5)^2 = 25$$

$$S = \frac{1}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots)]\Delta x$$

$$S = \frac{1}{3}[(1 + 25) + 4(4 + 16) + 2(9)] * 1$$

$$S = \frac{1}{3}[(26) + 80 + 18] = \frac{124}{3} = 41.333$$

أسئلة: بطريقة سمبسون جد القيمة التقريبية للتكاملات السابقة مع تحديد الأسئلة التي لا يمكن حلها ولماذا.

$$1 - \int_0^2 x dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$$

$$2 - \int_1^4 x^3 dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 3$$

$$3 - \int_0^4 \sqrt{x} dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 4$$

$$4 - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow n = 6$$

طرق التكامل

أهداف الوحدة

سيكـون الـطالب بعـد دراستـهِ لهـذه الـمادة قـادراً عـلى :

5- حل بعض مسائل التكامل التي لا يمكن حلها باستخدام قوانين التكامل العامة.
6- التعرف على كيفية حل تلك المسائل باستخدام طق التكامل بالتجزئة أو التعويض أو الكسور الجزئية ومعرفة الطريقة المثلى لحل أي مسألة.

أولا:التكامل بالتجزئة (integration by parts)

هذه الطريقة تعتمد على قانون حاصل ضرب دالتين(u.v)

$$d(u*v) = u*dv + vdu$$

$$u*dv = d(u*v) - v*du$$

وبأخذ تكامل الطرفين نحصل على

$$\int u*dv = u*v - \int v*du$$

تسمى المعادلة الأخيرة بقاعدة التكامل بالتجزئة

امثلة:- جد تكامل الدوال التالية بطريقة التجزئة

$$1 - \int x.\ln x.dx$$

$$let\ U = \ln x \rightarrow\rightarrow\rightarrow du = \left(\frac{1}{x}\right)dx\ , dv = xdx \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x.\ln x.dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}\int x.dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$2 - \int x.e^x.dx$$

$$let\ U = x \ \rightarrow\rightarrow\rightarrow du = dx\ , dv = e^x dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = e^x$$

$$\therefore \int x.e^x.dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$$

ثانيا:التكامل بالكسور الجزئية (integration of quotients)

شروط إجراء هذا التكامل:

أ- مقام الكسر قابل للتحليل.
ب- درجة البسط أقل من درجة المقام. واذا كانت البسط اكبر فيجب اجراء عملية القسمة اولا.

أمثلة:- جد تكامل الدوال التالية بطريقة الكسور الجزئية

$$1 - \int \frac{2x+41}{x^2+5x-14} dx$$

$$\frac{2x+41}{x^2+5x-14} = \frac{2x+41}{(x+7)(x-2)} = \frac{A}{(x+7)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\frac{2x+41}{(x+7)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+7)}{(x+7)(x-2)}$$

$$2x+41 = A(x-2)+B(x+7)$$

$$at\ x = 2 \rightarrow\rightarrow 2*2+41 = A(2-2)+B(2+7)$$

$$45 = 9B \rightarrow\rightarrow\rightarrow B = 5$$

$$at\ x = -7 \rightarrow\rightarrow 2*(-7)+41 = A(-7-2)+B(-7+7)$$

$$27 = -9A \rightarrow\rightarrow\rightarrow A = -3$$

$$\therefore \int \frac{2x+41}{x^2+5x-14} dx\ = \int \frac{A}{(x+7)} dx + \int \frac{B}{(x-2)} dx$$

$$= \int \frac{-3}{(x+7)} + \int \frac{9}{(x-2)} = -3\ln(x+7) + \ln(x-2)$$

$$2 - \int \frac{x+3}{x^2-4} dx$$

$$\frac{x+3}{x^2-4}=\frac{x+3}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-2)}$$

$$\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+3}{(x+2)(x-2)}$$

$$\therefore x+3=A(x-2)+B(x+2)$$

$$at\ x=2 \rightarrow\rightarrow 5=4B \ \rightarrow\rightarrow\therefore B=\frac{5}{4}$$

$$at\ x=-2 \rightarrow\rightarrow 1=-4A \rightarrow\rightarrow\therefore A=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \int \frac{x+3}{x^2-4}dx \ =\int \frac{A}{(x+2)}+\int \frac{B}{(x-2)}$$

$$=-\frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+2)}+\frac{5}{4}\int \frac{1}{(x-2)}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln(x+2)+\frac{5}{4}\ln(x-2)$$

ثالثا:التكامل بالتعويض:- في بعض التكاملات الكسرية تكون (x) تحت جذر بقوة (n) . لتبسيط هذا النوع من التكامل نفرض $(x=u^n)$ ،حيث () تمثل اكبر قوة جذر موجودة في الدالة، ويتم الحل كما في الامثلة التالية:-

أمثلة:- حل التكاملات التالية:-

$$1-\int \frac{\sqrt{x}.dx}{1+\sqrt[4]{x}}$$

$$let\ \ x=u^4 \ \ \rightarrow\rightarrow dx=4u^3.du$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x}.dx}{1+\sqrt[4]{x}}=\int \frac{u^2.4u^3du}{1+u}=4\int \frac{u^5du}{1+u}$$

باستعمال طريقة القسمة الطويلة..بتنزيل واحد من أس البسط والبدا بإشارة موجبة ثم سالبة وإنزال واحد من الأس الجديد وهكذا حتى نصل الى $(u^0=1)$وكما يلي ثم نضع كسر مقامه (1+u).

$$4\int \frac{u^5 du}{1+u} = 4\int \left(u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 - \frac{1}{1+u}\right) du$$
$$= 4\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|1+u|\right) + C$$

نعوض عن كل(u) بـ($x^{\frac{1}{4}}$)

$$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - \ln\left|1 + x^{\frac{1}{4}}\right| + C$$

$$2 - \int \frac{\sqrt{x}.dx}{1+\sqrt{x}}$$

$let\ \ x = u^2\ \ \rightarrow\rightarrow dx = 2u.du$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x}.dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{u^2.du}{1+u} = 2\int \left(u - 1 + \frac{1}{1+u}\right) du$$

$$= 2\left[\frac{u^2}{2} - u + \ln|1+u|\right] + C = x + \frac{\sqrt{x}}{2} + \ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

التغذية المسترجعة

حل المسائل التالية:-

$$1 - \int x^2.e^x.dx$$

$$2 - \int \frac{x+2}{x^2-9} dx$$

$$3 - \int \frac{\sqrt{x}.dx}{1+\sqrt[6]{x}}$$

الإحصاء

علم يبحث ويعالج المجموعات التي تتكون من مجموعات كبيرة ويمنحنا الوسائل التي تعيننا على جمع وتنظيم البيانات العينية عن هذه المجموعات وتحليلها والحكم عليها ومقارنتها بغيرها من المجموعات.

العمليات الإحصائية:- وتشمل

1- جمع البيانات:- وهي المعلومات الأولية العددية حول نموذج معين او عينة دون دراسة الكل.والطريقة المثلى لاختيار العينة هي الطريقة العشوائية.
2- تنظيم البيانات: وضع البيانات في جداول إحصائية او رسوم بيانية لمعالجتها رياضيا ولسهولة الاطلاع عليها ومعرفة الدلائل الأولية لها.
3- معالجة البيانات رياضيا:استخدام البيانات الأولية لاستخراج نتائج عددية لها دلالات إحصائية.
4- التفسير والاستنتاج:دراسة النتائج التي تم الحصول عليها لغرض لغرض الوصول الى حقائق معينة تفيد الجهة المعنية في توجيه عملها اعتمادا على ذلك التفسير.ويتطلب التفسير البداهة والامانة والالمام بالموضوع.

البيانات الاحصائية: مجموعة من القيم العددية التي يحصل عليها الباحث،وتسمى أحيانا قيم المتغير.

مثال:- كانت درجات (40) طالبا في احد الامتحانات كما يلي، ارسم المدرج والمضلع التكراري لهذه العينة.

75	38	73	65	46	50	60	70
85	82	65	45	32	56	52	62
75	30	44	73	63	60	55	53
87	43	79	68	73	63	35	53
40	82	76	37	68	72	63	60

30	32	35	37	38	40	43	44
45	46	50	52	53	53	55	56
60	60	60	62	63	63	63	65
65	68	68	70	72	73	73	73
75	75	76	79	82	82	85	87

نستفاد من هذا الجدول من معرفة أعلى واقل درجة والراسبون والناجحون والدرجات الأكثر تكرارا.

التوزيع التكراري : هو تجميع قيم المتغير بعدد من الفئات المتساوية الطول غالبا يتوقف عدد الفئات على:

1- طبيعة المجموعة المدروسة وهدف الدراسة.
2- عدد مفردات المجموعة ودقة قياسها.

أفضل عدد للفئات (6-12) فئة.

خطوات عمل التوزيع التكراري:

1- حساب المدى للمجموعة = اكبر قيمة – اصغر قيمة
2- يقسم المدى على عدد الفئات الذي نراه مناسبا فنحصل على قيمة صحيحة لطول الفئة.
من النتائج اعلاه المدى = 87-30=57 نقرب الى اقرب عشرة وهي (60) لذا ناخذ عدد الفئات يساوي (6).
3- طول الفئة= 57\6=9.7=10

اسهل طريقة لتسجيل الفئات هو جعل بداية كل فئة قيمة محددة ونهايتها اقل من القيمة المحددة.

من المثال

الفئة الأولى 40الى اقل من 40 أو (30-39) الفئة الثانية (40-50) وهكذا حتى الفئة الاخيرة.

متوسط الفئة =(أعلى قيمة –اقل قيمة) في الفئة مقسوما على اثنين= مركز الفئة.

التكرار=مجموع القراءات ضمن كل فئة.

الاحتمال: هو التكرار النسبي لاي فئة ويمثل نسبة التكرار الى العدد الكلي للقراءات.

تفريغ البيانات في جدول التفريغ: وكما موضح في الجدول

الفئة	مركز الفئة	التكرار
الاولى(30-39)	35	5
الثانية(40-49)	45	5
الثالثة(50-59)	55	6
الرابعة(60-69)	65	11
الخامسة(70-79)	75	9
السادسة(80-89)	85	4

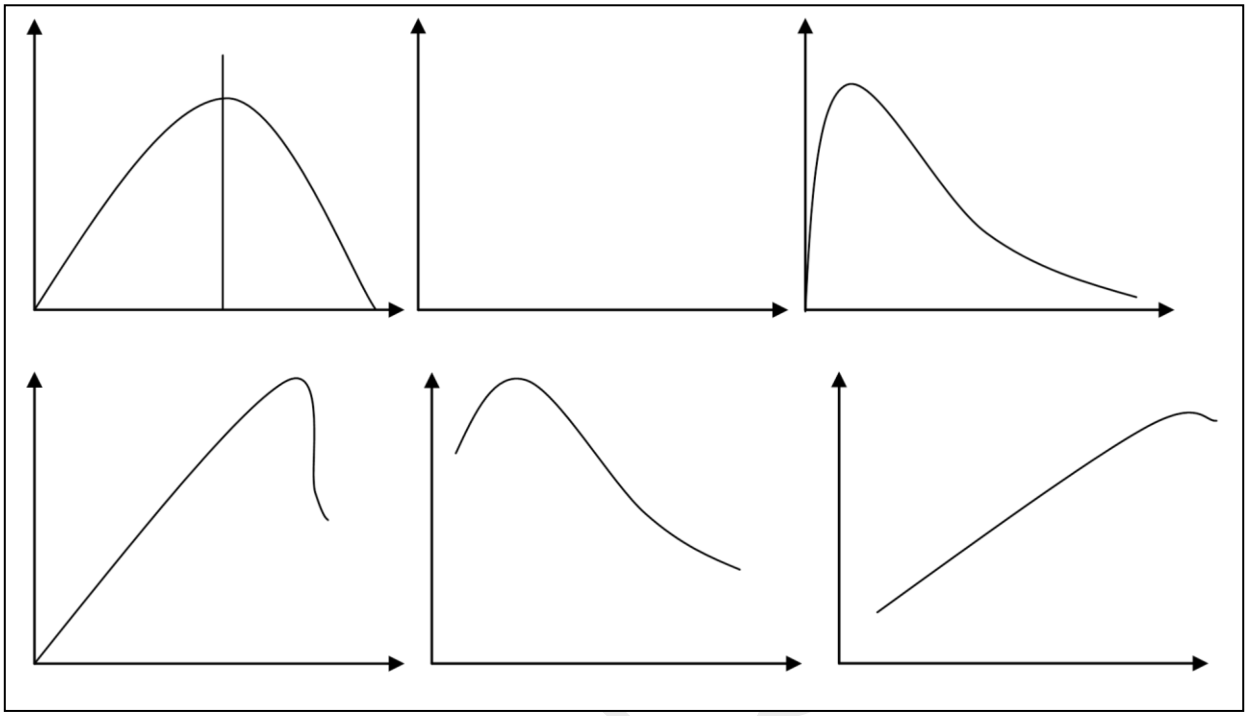
المدرج التكراري:شكل بياني من مجموعات من المستطيلات المتلاصقة تتساوى في عدد الفئات وقاعدة كل منها وحدة طول تمثل طول الفئة ،وارتفاعها تمثل تكرارات تلك الفئات.

المضلع التكراري:هو الخط المتكسر الواصل بين منتصفات القواعد العليا للمدرج التكراري.

المنحني التكراري: اذا كان الخط الواصل بين مراكز الفئات والتكرارات خطا منحنيا يسمى الشكل بالمنحني التكراري .توجد عدة انواع من المنحنيات التكرارية .

1- المنحني التكراري المعتدل
2- المنحني التكراري غير المعتدل ويشمل

أ- المتجمع. ب- الملتوي يسارا. ج- الملتوي يمينا. د- المتصاعد. هـ- المتنازل.



الوسط الحسابي: عبارة عن مجموع القراءات(x) مقسوما على عددها (n).

الفئات	مراكز الفئات	التكرار	مجموع القراءات
49-45	47	4	188
54-50	52	10	520
59-55	57	11	627
64-60	62	6	372
69-65	67	6	402
74-70	72	2	144
79-75	77	1	77
		40	2330

الوسط الحسابي= $\frac{2330}{40} = 58.25$

توجد طريق أخرى لإيجاد الوسط الحسابي.

مثال: جد الوسط الحسابي للأعداد التالية (190,232,250,295,303)

الحل:

1- نختار الرقم الاوسط وهو(250) كوسط حسابي
2- نحسب محصلة الفرق بين الوسط الحسابي المختار وبقية الاعداد (-60,-18,0,45,53=20)
3- الوسط الحسابي= $250 + \frac{20}{5} = 254$

التشتت: هو التباعد بين مفردات اي مجموعة من القيم،ويعتبر مقياسا لمدى تجانس المجموعات الاحصائية. ويكون التشتت صغيرا عندما تكون القيم المأخوذة قريبة من بعضها ،ويكبر التشتت كلما كانت القيم متباعدة.